2081

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR 3ème CYCLE

Spécialité Physique des Gaz et des Plasmas

par

Philippe GENTA

SPECTRES NEUTRONIQUES DE LA DECHARGE FOCUS

Soutenue le 13 mai 1976, devant la Commission d'Examen

MM.	J.L. DELCROIX	Président
	C. JABLON	
	R. SCHUTTLER	Examinateurs
	J.P. WATTEAU	
	P. GUILLANEUX	Rapporteur

T H E S E

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR 3ème CYCLE

Spécialité Physique des Gaz et des Plasmas

par

Philippe GENTA

SPECTRES NEUTRONIQUES DE LA DECHARGE FOCUS

Soutenue le 13 mai 1976 , devant la Commission d'Examen

MM.	J.L. DELCROIX	Président
	C. JABLON	
	R. SCHUTTLER	Examinateurs
	J.P. WATTEAU	
	P. GUILLANEUX	Rapporteur

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

	Pages
1er PARTIE : INTRODUCTION	1
2e PARTIE : ETUDE MATHEMATIQUE	15
I. MISE EN PLACE DU PROBLEME	
I.A. Réaction nucléaire dans le système du laboratoire	17
I.B. Notion de flux dans le système du laboratoire	21
I.C. Correspondance $f_{1,2} \longrightarrow \Phi_{f_{1,2}}$	21
II. PROBLEME INVERSE : DETERMINATION DE $f_{1,2}$ A PARTIR DES RESULTATS EXPERIMENTAUX	
II.A. Position du problème	21
II.B. 1ere simplification (intégration dans l'espace et dans le temps)	22
II.C. Nouvelles hypothèses simplificatrices. Modèle de M. J. BERNSTEIN	23
II.C.1. Séparation de $f_{1,2}$ en un produit	24
II.C.2. Hypothèse de deux populations	24
II.C.3. Symétrie azimutale de f	26
II.C.4. Expression définitive du flux en fonction de f^1	27
II.D. Notion de Spectre : formulation de LEHNER et POHL	27
II.E. Utilisation du spectre pour le calcul de f^1 et E_T	29

III. ETUDE DE LA TRANSFORMATION $f^1 \longrightarrow S_{f^1}$ DANS LE CADRE DES HYPOTHESES DE M. J. BERNSTEIN

III.A. Présentation de Φ_{f^1} et de S_{f^1} dans le système du laboratoire

III.A.1. Flux Φ_{f^1} 32

III.A.2. Spectre S_{f^1} 33

III.A.2.a. σ_d^1 et E_n fonctions de φ_d 34

III.A.2.b. σ_d^1 et E_n indépendants de φ_d 35

III.B. Résultats concernant les calculs pratiques

III.B.1. Géométrie 38

III.B.2. Trigonométrie 39

III.B.3. Expressions explicites de S_{f^1} 40

III.B.3.a. E_n et σ_d^1 dépendent de φ_d 40

III.B.3.b. E_n et σ_d^1 ne dépendent pas de φ_d 41

III.B.3.b.α. $\vartheta_n = 0$ 41

III.B.3.b.β. $\vartheta_n = \pi$ 42

III.B.3.C. Etude d'un spectre isotrope 42

IV. RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE. NECESSITE DE L'ETABLISSEMENT D'UN DICTIONNAIRE

IV.A. Etude de la transformation $f^1 \longrightarrow S_{f^1}$ 43

IV.A.1. Recherche d'une base de l'espace des fonctions f^1 43

IV.A.2. Calcul de la base image 46

IV.A.3. Mise en oeuvre du développement proposé - Lissage 46

IV.B. Etude de l'équation $S_M - \lambda S_{f^1}$, convergence du développement de la solution f^1

IV.B.1. Présentation du problème 49

IV.B.2. Etude de $\lambda(E, \vartheta_n)$ 52

IV.B.3. Passage au flux 56

IV.B.4. Méthode de convergence des moindres carrés 58

IV.B.4.a. Discrétisation 59

IV.B.4.b. Lissage 60

IV.B.4.c. Rappel de la méthode des moindres carrés 60

IV.C. Etudes des fonctions de base 62

IV.D. Recherche d'un développement par la méthode des moindres carrés

IV.D.1. Résolution du système en question 64

IV.D.2. Optimisation du résultat - variation de E_T 64

IV.E. Etude de la convergence

IV.E.1. Présentation des résultats, normalisation 64

IV.E.2. Paramètres d'étude de la convergence ξ , ξ / Σ 66

V. ETUDE DES DIFFERENTS PARAMETRES DU CALCUL : E_d^2, E_d^1, E_T, j ET LE NOMBRE DES TERMES DU DEVELOPPEMENT DE f^1 EN $\cos\theta_d$ 66

V.A. Effets sur les courbes isotropes de E_d^2, E_d^1, j

V.A.1. Effets du paramètre j 67

V.A.2. Effets du paramètre E_d^1 68

V.A.3. Effets du paramètre E_d^2 68

V.B. Anisotropie

V.B.1. Effet de j 68

V.B.2. Effet du paramètre E_T 69

V.C. Détermination de E_d^1 . Discussion 69

V.D. Détermination de E_d^2 par le flux ($E_T = 0$) 70

3e PARTIE : PROGRAMMATION ET TEST. 73

I. CALCUL PRATIQUE DE ρ^*, ρ, U^*, POUR $\theta_n \neq 0, \pi$

I.A. Construction de ρ^*, ρ 75

I.B. Calcul de $U_{i,j}^*$ et S^* pour $\theta_n \neq 0, \pi$ 76

I.C. Calcul de $U_{i,j}$ et S_{f^1} pour $\theta_n \neq 0, \pi$ 76

I.D. Calcul de $U_{i,j}$ et S_{f^1} pour $\theta_n = 0, \pi$ 76

I.E. Conclusions 76

II. ENREGISTREMENTS D'UN DICTIONNAIRE DES $U_{i,j}$ SUR BANDE MAGNETIQUE

II.A. Enregistrement 77

II.B. Eléments de discussion

II.B.1. Principe de la constitution d'un dictionnaire 77

II.B.1.a. Variation de E_d^1 77
II.B.1.b. Variation de E_d^2 78
II.B.1.c. Variation de j 78
II.B.1.d. Variation de E_π 78
II.B.1.e. Valeurs de θ_n 78
II.B.2. Etat actuel du dictionnaire 79

III. PROGRAMME D'EXPLOITATION DE LA BANDE.
III.A. Sommation des $U_{i,j}$ 79
III.B. Normalisation 79
III.C. Sortie STROMBERG - CARLSON 83

IV. TESTS DE CONTROLE DE LA PRECISION DU CALCUL. 83

V. COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES
V.A. Programme de minimisation de ξ , calcul des $\alpha_{i,j}$ calcul des flux 83
V.B. Résultats pratiques 83

4e PARTIE : DEPOUILLEMENTS. 85

I. DEPOUILLEMENTS PRELIMINAIRES.
I.A. Construction de courbes élémentaires pour observer les caractéristiques des spectres de base
I.A.1. Courbes $S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$ 87
I.A.2. Tracé du réseau des courbes $U_{i,o}$ pour $\theta_n = o, \frac{\pi}{2}$ et $E_\pi = 0;10$ keV 87
I.A.3. Effet de E_d^1, E_d^2, j 99
I.B. Injections préférentielles
I.B.1. Injection à o 99
I.B.2. Injection à $\frac{\pi}{2}$ 99
I.B.3. Forme de f^1 choisie pour le dépouillement 104

II. DEPOUILLEMENT DES COURBES EXPERIMENTALES POUR 2 DIRECTIONS (CAMPAGNE LIMEIL)

II.A. Présentations et études des courbes expérimentales sur un exemple 106

II.A.1. Calage temporel 106

II.A.1.a. Résolution temporelle 108

II.A.1.b. Erreur de chronologie 109

II.A.2. Atténuation 110

II.A.2.a. Etalonnage à 0 et à $\frac{\pi}{2}$ 110

II.A.2.b. $L(\theta_n)$ petit 110

II.A.3. Lissage 110

II.A.4. Caractéristiques des courbes expérimentales 111

II.B. Dépouillements des résultats expérimentaux sur un exemple

II.B.1. Choix de E_r 111

II.B.2. Choix de E_d^1 112

II.B.3. Choix de E_d^2 114

II.B.3.a. Calculs pratiques 114

II.B.3.b. Discussion - problèmes soulevés par le choix de ce paramètre 114

II.B.4. Choix de j

II.B.4.a. Problème des pentes 115

II.B.4.b. Discussion des résultas obtenus 115

II.B.5. Choix de i

II.B.5.a. Nombre de termes du développement 116

II.B.5.b. Discussion 116

II.B.6. Résultats

II.B.6.a. Obtention de spectres et d'une fonction $\int^1$ 116

II.B.6.b. Erreurs, signification 117

II.B.6.c. Essais d'étude de la convergence suivant le nombre de termes en i 117

II.B.6.d. Calcul des flux, détermination de $n_d n_r$ 125

II.C. Autre exemple de dépouillement

II.C.1. présentation du tir 130

II.C.2. résultats et discussion 130

II.C.3. flux 134

III. DEPOUILLEMENTS DES COURBES EXPERIMENTALES POUR 3 DIRECTIONS (CAMPAGNE DE MORONVILLIERS).

III.A. Présentation des résultats expérimentaux sur un tir particulier 134

III.B. Dépouillements des résultats expérimentaux sur un tir particulier

III.B.1. Choix de E_d^1 135

III.B.2. Choix de E_d^2 135

III.B.3. Choix de j 136

III.B.4. Choix du nombre de i 136

III.B.5. Choix de E_T 136

III.C. Résultats et courbes sur un tir particulier

III.C.1. Choix des paramètres de dépouillement 136

III.C.2. Résultats obtenus 138

III.C.3. Discussion de la valeur de $E_d^2, j, a(\frac{\pi}{2})$ 138

III.D. Autres résultats. 139

III.D.1. Résultats obtenus 139

III.D.1.a. Dépouillement du tir 236 152

III.D.1.b. Dépouillement du tir 260 152

III.D.1.c. Dépouillement du tir 264 152

III.D.2. Analyse des résultats.

III.D.2.a. Erreurs sur la détermination des α 153

III.D.2.b. Calcul des flux 160

5e PARTIE : CONCLUSION. 165

ANNEXE A : ETUDE DETAILLEE DE L'INTEGRALE S_{f_1} DANS LE CAS FAISCEAU-CIBLE A SYMETRIE AZIMUTALE.

I. Trigonométrie sphérique 173

II. Calcul de la section efficace différentielle de la réaction dans le système du laboratoire 178

II. DEPOUILLEMENT DES COURBES EXPERIMENTALES POUR 2 DIRECTIONS (CAMPAGNE LIMEIL)

II.A. Présentations et études des courbes expérimentales sur un exemple 106

II.A.1. Calage temporel 106

II.A.1.a. Résolution temporelle 108

II.A.1.b. Erreur de chronologie 109

II.A.2. Atténuation 110

II.A.2.a. Etalonnage à 0 et à $\frac{\pi}{2}$ 110

II.A.2.b. $\angle(\theta_n)$ petit 110

II.A.3. Lissage 110

II.A.4. Caractéristiques des courbes expérimentales 111

II.B. Dépouillements des résultats expérimentaux sur un exemple

II.B.1. Choix de E_r 111

II.B.2. Choix de E_d^1 112

II.B.3. Choix de E_d^2 114

II.B.3.a. Calculs pratiques 114

II.B.3.b. Discussion - problèmes soulevés par le choix de ce paramètre 114

II.B.4. Choix de j

II.B.4.a. Problème des pentes 115

II.B.4.b. Discussion des résultas obtenus 115

II.B.5. Choix de i

II.B.5.a. Nombre de termes du développement 116

II.B.5.b. Discussion 116

II.B.6. Résultats

II.B.6.a. Obtention de spectres et d'une fonction f^1 116

II.B.6.b. Erreurs, signification 117

II.B.6.c. Essais d'étude de la convergence suivant le nombre de termes en i 117

II.B.6.d. Calcul des flux, détermination de $n_d n_r$ 125

II.C. Autre exemple de dépouillement

II.C.1. présentation du tir 130

II.C.2. résultats et discussion 130

II.C.3. flux 134

III. DEPOUILLEMENTS DES COURBES EXPERIMENTALES POUR 3 DIRECTIONS (CAMPAGNE DE MORONVILLIERS).

III.A. Présentation des résultats expérimentaux sur un tir particulier 134

III.B. Dépouillements des résultats expérimentaux sur un tir particulier

III.B.1. Choix de E_d^1 135

III.B.2. Choix de E_d^2 135

III.B.3. Choix de j 136

III.B.4. Choix du nombre de i 136

III.B.5. Choix de E_T 136

III.C. Résultats et courbes sur un tir particulier

III.C.1. Choix des paramètres de dépouillement 136

III.C.2. Résultats obtenus 138

III.C.3. Discussion de la valeur de $E_d^2, j, a(\frac{\pi}{2})$ 138

III.D. Autres résultats. 139

III.D.1. Résultats obtenus 139

III.D.1.a. Dépouillement du tir 236 152

III.D.1.b. Dépouillement du tir 260 152

III.D.1.c. Dépouillement du tir 264 152

III.D.2. Analyse des résultats.

III.D.2.a. Erreurs sur la détermination des α 153

III.D.2.b. Calcul des flux 160

5e PARTIE : CONCLUSION. 165

ANNEXE A : ETUDE DETAILLEE DE L'INTEGRALE S_{f_1} DANS LE CAS FAISCEAU-CIBLE A SYMETRIE AZIMUTALE.

I. Trigonométrie sphérique 173

II. Calcul de la section efficace différentielle de la réaction dans le système du laboratoire 178

III. Etude des variations de $\psi_\ell, \psi_n, E_n, \chi$ en fonction de φ_d 182
III.a. Variation de ψ_ℓ 183
III.b. Variation de $\psi_n(\varphi_d)$ 186
III.c. Variation de $E_n(\varphi_d)$ 188
III.d. Variation de $\chi(\varphi_d)$ 193
IV. Cas particuliers. 196

ANNEXE B : ETUDE DETAILLEE DE S_{f_1} POUR $\theta_n \neq 0, \pi$ 197

I. Calcul complet de $\int_0^{2\pi} \sigma_d^{-1} \delta(E - E_n) d\varphi_d$. Etude de fonction 197
II. Etude du premier étage d'intégration (intégration en θ_d) 206
II.a. Intégration en θ_d à E donné 207
II.b. Etude de E_1 et de E_2 en fonction de θ_d 208
II.b.α. Etude de E_1 et de E_2 en fonction de θ_d par les dérivées 209
II.b.β. Etude de E_1 et de E_2 par le discriminant 213
II.c. Etude de S^*: intégration en θ_d 216
III. Etude du deuxième étage d'intégration (intégration en E_d) 218
III.a. Domaine d'intégration 219
III.b. Domaine de variation 221
IV. Calcul du flux 223
IV.a. Calcul de E_d^{-1} 224
IV.b. Calcul de $n_d n_\pi$ 225

ANNEXE C : ETUDE DETAILLE DE S_{f_1} POUR $\theta_n = 0, \pi$ 227

I. Résultat en $\theta_n = 0$ 227
II. Résultat en $\theta_n = \pi$ 231
III. Construction d'un spectre isotrope 233

ANNEXE D : ETUDE DES FONCTIONS DE BASE. 239

I. Etude du cas $\theta_n \neq 0, \pi$
I.a. Relations de récurrence dans le cas $E_\pi = 0$ 240
I.b. Propriétés des courbes en question $(E_\pi = 0)$ 242
I.c. Construction des courbes correspondantes 243

II. Etude du cas $\theta_n = 0 , \pi$

II.a. Etude de la relation de récurrence dans le cas $E_T = 0$ 244

II.b. Construction de courbes 245

ANNEXE E : PREPARATION DES CALCULS POUR LE PASSAGE SUR ORDINATEUR. CALCUL PRATIQUE DE $\rho^* , \rho , U^*_{i,j} , U_{i,j}$

I. Choix du système d'unités. 247

II. Données. 249

III. Calcul de $\rho^*(E_d, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$ et $\rho(E_d, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$ 252

IV. Branches asymptotiques de $\rho^*(E_d, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$ 256

V. Calcul de $U^*_{i,j}(E_d, E_T, E, \theta_n)$ et de $S^*(E_d, E_T, E, \theta_n)$ pour $\theta_n \neq 0 , \pi$ 258

VI. Calcul de $U_{i,j}(E_T, E, \theta_n)$ et $S_{f1}(E_T, E, \theta_n)$ pour $\theta_n \neq 0 , \pi$ 260

VII. Calcul de $U_{i,j}(E_T, E, \theta_n)$ et $S_{f1}(E_T, E, \theta_n)$ pour $\theta_n = 0 , \pi$ 265

ANNEXE F : ENREGISTREMENT D'UN DICTIONNAIRE DES $U_{i,j}$ SUR BANDE MAGNETIQUE

I. Généralités 267

II. Modalités pratiques 267

ANNEXE G : PROGRAMME D'EXPLOITATION DE LA BANDE : PROGRAMME 8.

I. Sommation des $U_{i,j}$ 271

II. Normalisation. 272

III. Sortie STROMBERG - CARLSON de $S_{f1}(E_T, E, \theta_n)$ 273

IV. Conclusions. 275

ANNEXE H : TESTS DE CONTROLE DE LA PRECISION DES DIVERSES ETAPES DU CALCUL.

INTRODUCTION. 277

I. Branches infinies de $\mathcal{S}^*$. Convergence. 279
II. Calcul complet de S_{f1} 282
III. Test d'isotropie. 283
IV. Annulation des $U_{2p+1,j}(0, E, \frac{\pi}{2})$ 287
V. Vérification des propriétés des courbes E_1 et E_2 287
VI. Vérification des propriétés de $D(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$ 287
VII. Inégalités entre les $U_{i,j}$ 291
VIII. Continuité en θ_n 291
IX. Construction des $U^*_{i,j}$ en fonction de E_d 291

CONCLUSION. 293

ANNEXE I : COMPARAISON QUANTITATIVE AVEC L'EXPERIENCE. DISCUSSION

I. Utilisation d'une méthode de calcul systématique : Méthode des moindres carrés.
I.a. Rappel. 295
I.b. Mise en oeuvre. Système d'équations linéaires. Problèmes d'ordre de grandeur.
I.b.α . Système d'équations linéaires. 296
I.b.β . Ordre de grandeur. 298
II. Programme de calcul des coefficients $\beta_{i,j}$ par la méthode des moindres carrés à E_π fixé.
II.a. Rappel des différents calculs effectués. Passage du temps à l'Energie. 300
II.b. Intervention de $\lambda(E, \theta_n)$ 301
II.c. Calcul des $\beta_{i,j}$ 302
II.d. Sortie de courbes S 303
II.e. Sortie de courbes $\tilde{S}$ 303
II.f. Sortie STROMBERG 305
III. Résultats pratiques. 305

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à :

- Monsieur le Professeur J. L. DELCROIX, qui a bien voulu accepter d'être mon directeur de thèse et m'a fait l'honneur d'en présider le jury ;
- Monsieur P. GUILLANEUX, Chef de la section TDC du service PG au Centre d'Etudes de Limeil, qui m'a suggéré de soumettre ce travail à l'Université et a bien voulu se pencher sur lui, dans ses différentes étapes, le soutenant de ses remarques toujours très perspicaces ;
- Monsieur le Professeur SCHUTTLER, qui, en tant qu'ingénieur conseil au CEA, m'a soutenu dans ce travail et l'a élargi de ses vastes connaissances ;
- Monsieur C. JABLON, pour de très utiles discussions et pour ses très percutantes critiques ;
- Monsieur le Professeur J. P. WATTEAU, pour son attention constante et son soutien efficace ;
- Monsieur le Professeur SABATIER, dont ses conseils de mathématicien ont été décisifs ;
- Monsieur BEKIARIAN, Chef du service Physique Générale, qui a manifesté un intérêt constant pour ce travail ;
- Monsieur R. VEZIN, mon collègue et ami, avec lequel je collabore étroitement dans toutes mes études ;

- Messieurs A. BERNARD, A. COUDEVILLE, A. JOLAS, J. de MASCUREAU, J. LAUNSPACH, M. NAIL, les expérimentateurs avec lesquels nous faisions équipe et qui sont à l'origine de cette étude, d'une part par nombre quantité de vues nouvelles qu'ils ont apportées sur la décharge Focus et par la volonté qu'ils ont eu de tester le modèle de M. J. BERNSTEIN. Je tiens à ajouter que nous avons eu avec eux un échange constant et étroit d'idées pour mener à bien cette modélisation.

- Messieurs F. MILLET et J. CHENEAU qui ont réalisé la programmation de ce travail et répondu inlassablement à nos demandes de calcul ;

- Madame ADNOT qui a réalisé une frappe de qualité.

RESUME

La décharge Focus produit une forte émission neutronique due à des réactions D.D.. Des études récentes réalisées à Limeil ont mis en évidence, grâce à l'utilisation de la méthode du temps de vol, la très forte anisotropie des spectres obtenus, en même temps que l'interférométrie holographique permettait de révéler devant le front de choc la présence d'un front d'ionisation à vitesse supérieure. C'est l'élaboration poussée de cet ensemble de résultats expérimentaux qui a permis un test de modélisation relativement complet. A partir des spectres neutroniques mesurés en sortie, on essaie de remonter à une fonction de distribution des deutérons de la décharge entrant en réaction, bâtie d'après un modèle faisceau-cible, dans lequel des deutérons accélérés viennent frapper des deutérons-cibles. La réduction du problème à la recherche de la détermination d'une fonction de distribution simple des vitesses des deutérons accélérés et de la vitesse supposée uniforme des particules-cibles permet de mener l'analyse numérique en cherchant un développement linéaire de cette fonction sur une base. Les spectres et les flux qui forment les bases images correspondantes sont obtenus après des intégrations nécessitant des calculs directs mais complexes. La comparaison à l'expérience se fait en utilisant une méthode des moindres carrés. Les résultats permettent d'atteindre un écart relatif moyen de 20 à 30 %. Des programmes on été mis en place pour tester le modèle quand on le désire.

lere PARTIE : INTRODUCTION

L'expérience FOCUS est née de l'échec des machines à autostriction linéaire type pinch Z, à symétrie cylindrique.

C'est MATHER /1/ qui a l'idée de réaliser une décharge avec un simple injecteur de plasma constitué d'un canon coaxial qui s'apparente aux machines de type Z et qu'il dénomme FOCUS (1962). Parallèlement FILIPPOV et son équipe réalisent un montage également à symétrie axiale, fonctionnant d'une manière analogue.

Le grand nombre de neutrons émis dans tout l'espace, jusqu'à 10^{10} avec du deutérium, pousse alors un certain nombre de laboratoires à travailler sur des montages de ce type. LIMEIL /2/ monte une machine type MATHER à partir de 1966.

FOCUS, à énergie donnée, émet beaucoup plus de neutrons que les pinchs et l'espoir naît que ces neutrons soient d'origine thermonucléaire.

C'est M.J. BERNSTEIN /3/ qui, le premier, s'attaque de manière nette à cette interprétation. Mais l'intérêt de FOCUS comme forte source de neutrons reste et on recherche alors d'autres possibilités d'explication (M.J. BERNSTEIN, C. MAISONNIER, ...).

C'est justement le modèle proposé par M.J. BERNSTEIN /4/ que nous avons mis en oeuvre dans cette étude. Avant de le présenter plus complètement, nous voulons rappeler l'ensemble des résultats obtenus récemment à LIMEIL dont nous essayons de rendre compte.

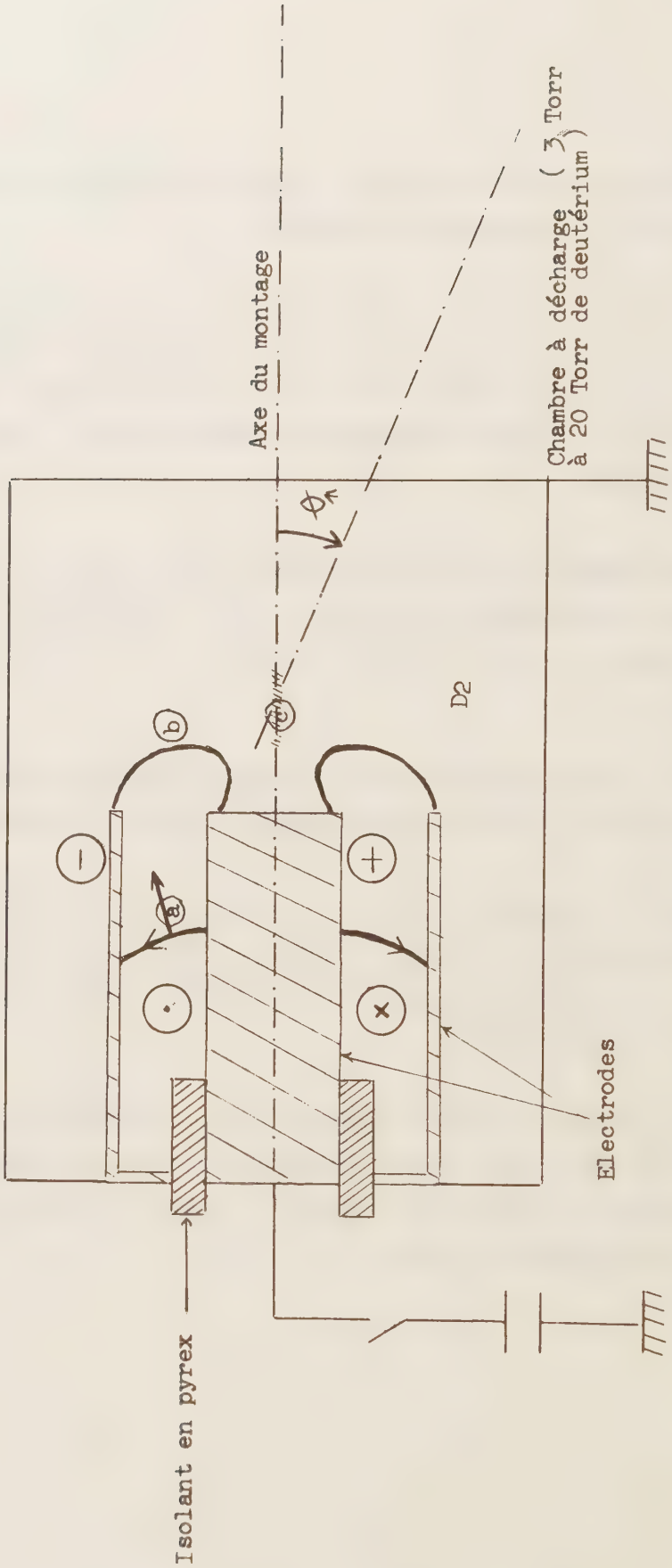


Fig 1 : Schéma de l'expérience FOCUS

La figure 1 représente un schéma très simplifié de la chambre à décharge. Elle permet de créer un plasma FOCUS (type MATHER). Nous y avons fait figurer les trois premières phases de la décharge, qui sont facilement mises en évidence à l'aide d'une caméra ultra-rapide permettant de suivre le déplacement du front lumineux, correspondant approximativement au front d'ionisation et au front de choc :

a) à l'issue du claquage le long de l'isolant, phase de propagation axiale ;
b) mouvement de la nappe à l'extrémité libre du canon, désigné sous le nom de compression radiale ;
c) en fin de compression radiale, formation d'un filament.

Les études entreprises depuis plusieurs années à LIMEIL sur le plasma FOCUS (type MATHER), dont nous venons de rappeler brièvement le début de l'évolution, ont abouti à la mise en évidence de phénomènes nouveaux liés à la présence d'instabilités microscopiques /5/.

C'est en particulier la mise en oeuvre de l'interférométrie holographique et l'étude fine de l'émission neutronique (mesures de spectres par temps de vol, résolution spatiale) qui ont permis de compléter les mesures déjà faites. La recherche d'une chronologie plus fine a également permis d'arriver à une meilleure description de l'ensemble des phénomènes : en particulier calages des neutrons, des X et de l'émission UV par rapport à la formation du filament.

Enfin ces études ont débouché sur une description détaillée du filament et du processus de sa rupture /6/. Dans un premier temps, les modèles explicatifs avaient porté sur les trois premières phases précitées de la décharge :

1°) propagation axiale d'une nappe de plasma poussée à l'intérieur du canon par le piston magnétique $\vec{j} \times \vec{B}$;
2°) compression radiale, correspondant au mouvement de la nappe à l'extrémité libre du canon ;
3°) formation sur l'axe du montage, d'un filament en fin de compression radiale et début de l'émission neutronique.

Le schéma du chasse-neige et plus tard le code POTTER rendaient assez bien compte de la chronométrie des 2 premières phases. En ce qui concerne le filament, ces modèles ne donnaient l'ordre de grandeur ni de l'émission neutronique (10^6 au lieu de 10^9), ni de la "température" (le keV au lieu de la centaine d'eV).

Citons également le modèle du plasma thermique en mouvement (ou moving boiler) qui ne permet pas d'expliquer l'émission neutronique étant donné que la vitesse du centre de masse du plasma en mouvement sur l'axe dépasserait 10^8 cm/s, de même l'anisotropie de l'émission semble difficilement compatible avec ce modèle.

Ces contradictions nous ont amené à tester le modèle qui nous semble plus réaliste, proposé par M.J. BERNSTEIN, en même temps que les expérimentateurs faisaient porter leurs efforts sur la chronologie des phénomènes observés :

- création du filament et rupture ;
- émission neutronique ;
- émission de rayonnement X-dur ;
- émission UV.

Tout d'abord ils ont pu mettre en évidence le fait important suivant : le pied de l'émission neutronique (de l'ordre de 10^9 à 10^{10} neutrons) apparaît à la formation du filament, le maximum se produisant après sa disparition. Il n'est donc pas question de lier l'émission neutronique à la présence du filament : en particulier le volume du plasma qui émet les neutrons au lieu d'être de l'ordre de celui du filament ($\simeq$ 50 mm3), pourra être de l'ordre de 50 cm3 et plus, soit tout le volume situé devant l'électrode centrale et correspondant à ce que nous appellerons la "bulle" (voir introduction page 10).

Cette description de la décharge nous est fournie par l'interférométrie holographique dont la résolution temporelle, liée à la largeur de l'impulsion laser, est bonne (2 à 3 ns).

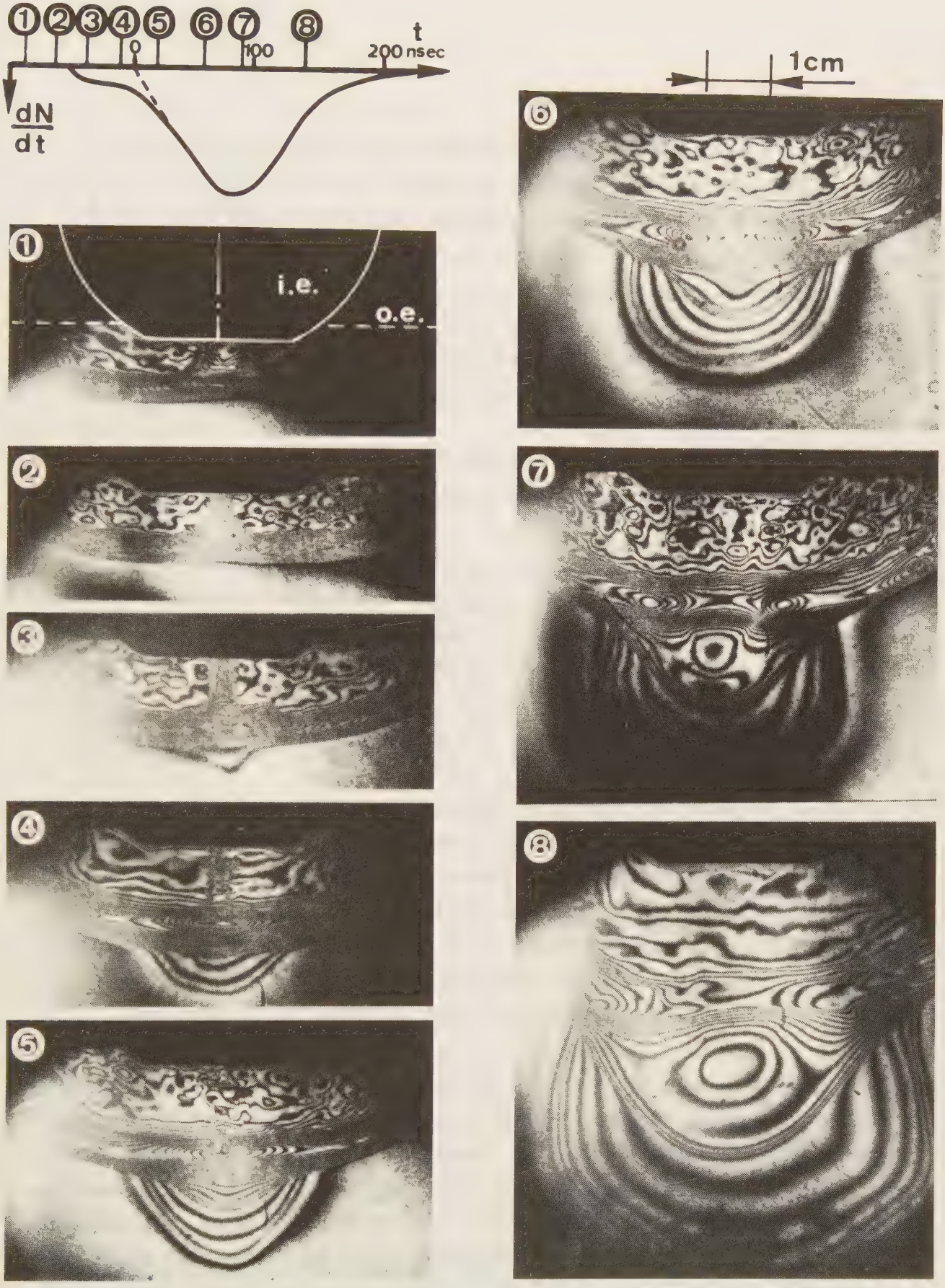


Fig. 2 : Interferogrammes de la décharge Focus

Si l'on travaille sans collimation et si l'on suppose l'émission totale instantanée ou, ce qui revient au même, si on intègre sur la durée Δt (double largeur à mi-hauteur de l'impulsion neutronique), on recueille à une certaine distance L de la source et dans une direction donnée θ_n par rapport à l'axe de symétrie de la machine, des "paquets" de neutrons $\Delta N(t)$ dont l'instant t d'apparition dépend de leur énergie E $\left(E = \frac{1}{2} m_n \frac{L^2}{t^2} \right)$ ce qui permet d'obtenir un $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ en fonction de E donc un spectre. C'est la méthode du temps de vol.

Il n'y a ni résolution temporelle ni spatiale, puisqu'il y a intégration en temps et dans tout l'espace émissif.

Grâce à l'aspect complémentaire de ces deux diagnostics, on a pu étudier ce qui se passe dans la décharge dans les 100 ou 200 ns qui suivent la rupture du filament et qui semblent bien constituer la phase intéressante de la décharge du point de vue de l'émission neutronique.

On a pu mettre en évidence les points suivants :

a) après la phase de compression radiale, il y a formation d'un filament ayant les caractéristiques suivantes : température ionique de l'ordre de 700 eV, température électronique inférieure ou égale à 100 eV, densité moyenne 5×10^{18} cm^{-3}, volume de quelques dizaines de millimètres-cube, durée de vie de 20 à 50 ns. L'émission neutronique thermonucléaire du filament calculée à partir des valeurs précédentes, est inférieure à 5×10^5 neutrons et négligeable vis-à-vis des quelques 10^9 neutrons émis par la décharge.

En observant en détail le filament (fig. 2) par la méthode interférométrique on trouve une évolution en fonction du temps qui est repérée sur le tracé de l'impulsion neutronique, dessinée en haut et à gauche de la figure 2 ; on peut remarquer qu'au temps - 70 ns (interférogramme n° 2), le filament a une longueur de 6 mm, un volume de 5 mm3 et une densité de l'ordre de 10^{19} cm^{-3}. Au temps - 10 ns (interférogramme n° 4) sa longueur est de 12 mm, sa densité de l'ordre de 5×10^{18} cm^{-3} et son volume de 50 mm3. A ce moment le nombre d'électrons, donc de deutérons qu'il contient est de 2×10^{17}.

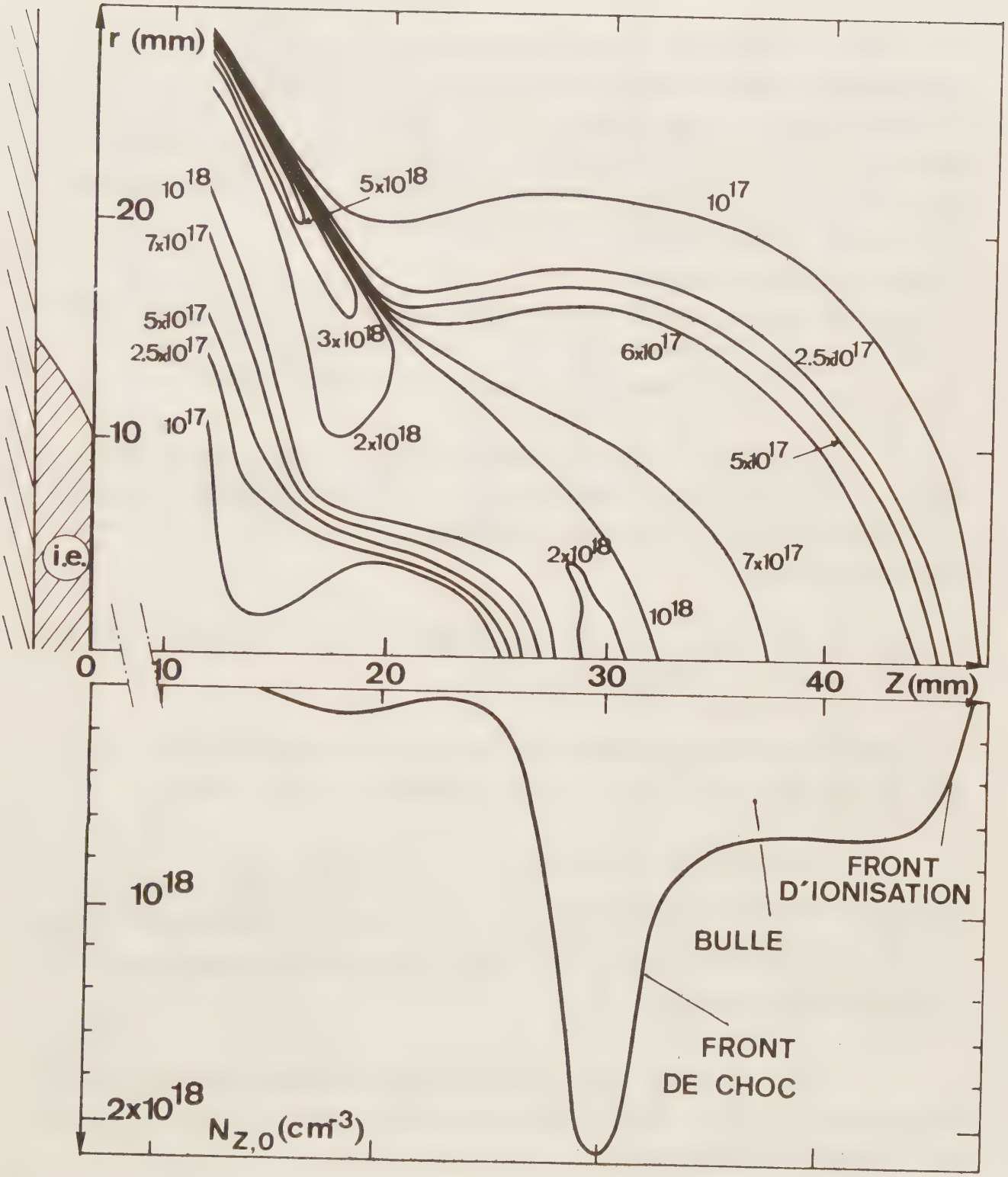


Fig. 3 : Courbes - Isodensité ; densité électronique sur l'axe

b) après la rupture du filament, on observe une onde d'ionisation qu'on peut attribuer à des deutérons accélérés. La vitesse de cette onde atteint 10^8 cm/s à 3 torr, ce qui correspond à des énergies de 2,8 eV pour les électrons et de 10 keV pour les deutérons. La figure 3b. montre la répartition de la densité électronique en fonction de la distance sur l'axe à un moment déterminé. On y met en évidence trois régions :

- front de l'onde d'ionisation ;
- un plateau dont la densité électronique, donc la densité ionique, correspond à la densité de remplissage soit 7×10^{16} D/cm3 par Torr ;
- un second gradient de densité correspondant au front de choc.

Les vitesses de front d'ionisation sont de l'ordre de 10^8 cm/s, celle du front de choc de l'ordre de 2 à 4 x 10^7 cm/s. La région s'étendant en arrière du front d'ionisation est appelée la "bulle". Le choc est suivi d'une onde de détente.

c) L'onde d'ionisation se développe pendant une centaine de ns, durée au cours de laquelle les neutrons sont émis.

d) Le spectre neutronique mesuré en fonction de l'énergie et de l'angle est toujours anisotrope quel que soit le régime de pression choisi.

Ces résultats rendent plausible le mécanisme suivant : les quelques 2×10^{17} deutérons présents à un moment dans le filament sont accélérés (voir BERNSTEIN) et viennent ensuite bombarder les deutérons de la "bulle", constituant des cibles. Les réactions nucléaires consécutives au bombardement produiraient les neutrons.

C'est sous cette forme que nous essayons de mettre en oeuvre le modèle proposé par M.J. BERNSTEIN, que nous avons évoqué plus haut, et qui est un modèle faisceau-cible.

Si cette hypothèse est exacte, on doit en particulier trouver que l'émission neutronique provient d'un volume important. La localisation de l'émission neutronique par collimation permet de connaître position et volume de la cible. On verra qu'une partie importante des neutrons est émise loin du filament.

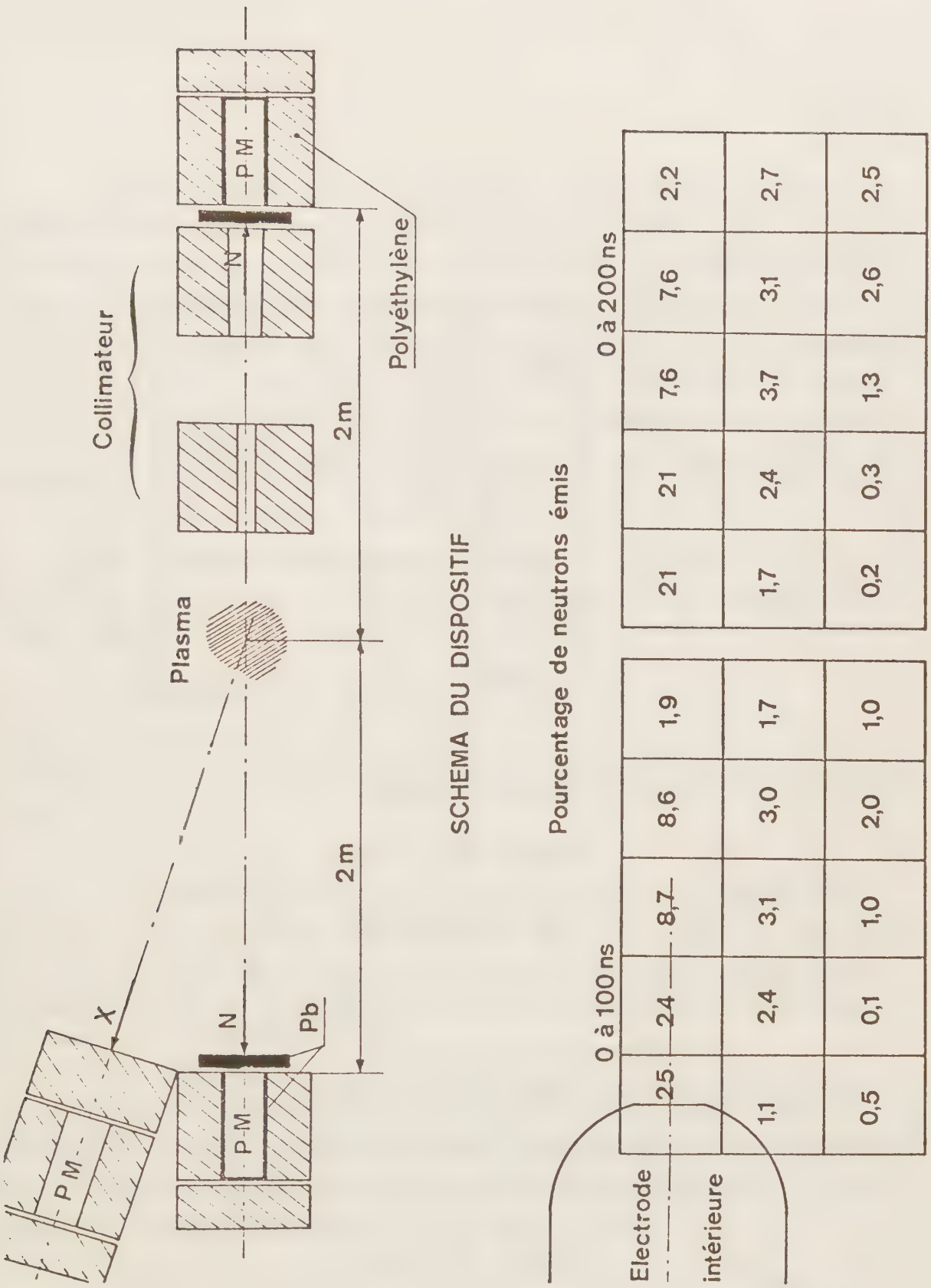


Fig. 4 : Dispositif de collimation

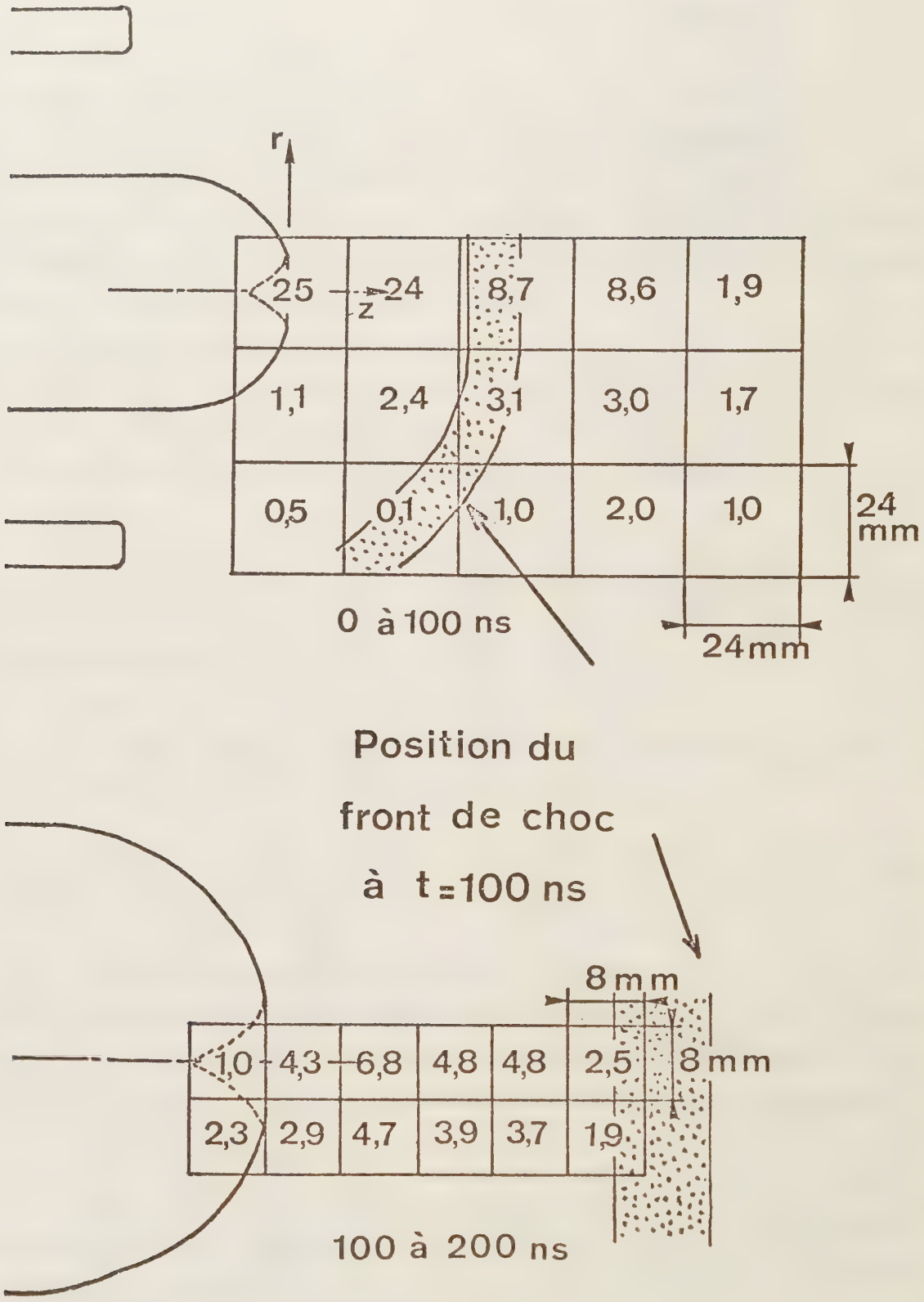


Fig. 5 : Carte des flux neutroniques

Pour localiser en r et z l'émission neutronique, les expérimentateurs ont rendu directionnel un détecteur (scintillateur + PM) à l'aide d'un collimateur constitué de deux blocs de polyéthylène. Les pas d'observation étaient de 23 mm et de 8 mm. Les expérimentateurs plaçaient deux détecteurs à 90° de part et d'autre de l'axe du plasma (fig. 4), l'un était collimaté, donnant la fraction de neutrons observée, l'autre non, donnant le nombre total de neutrons. A chaque tir on comparaît les signaux obtenus. Un troisième détecteur donnant le rayonnement X permettait de s'affranchir de son influence en le retranchant des signaux neutroniques.

Les tableaux de la figure 5 donnent le pourcentage de neutrons émis entre 0 et 100 ns et entre 100 et 200 ns pour une pression initiale de 3 Torr de deutérium.

Au-delà de 200 ns la contribution des neutrons diffusés (> 1 %) ne permet plus le dépouillement. Nous avons indiqué en plus sur les 2 tableaux de la figure 5, la position au temps t = 100 ns du front de densité électronique.

Il apparaît nettement sur le premier tableau une zone de forte émission : 50 % de neutrons sont émis entre 0 et 100 ns dans une zone proche de l'électrode intérieure, mais la contribution du reste du plasma dans un assez grand volume est toujours importante, ce qui paraît correspondre à l'ensemble de la "bulle".

Sur le second tableau, on observe la zone de forte émission près de l'électrode centrale avec une résolution spatiale plus fine que précédemment après le passage de l'onde de choc. La présence de neutrons dans ce volume paraît difficilement explicable par le modèle en question.

C'est en tenant compte de l'ensemble de ces résultats sur la configuration du plasma, que nous avons entrepris, à l'aide du modèle construit à partir des travaux de BERNSTEIN, de remonter de spectres de l'émission neutronique dans 2 ou 3 directions à une fonction de distribution double des vitesses des deutérons entrant en collision, $f_{1,2}$, largement simplifiée.

Dans un premier chapitre (Etude mathématique) nous avons donc présenté les hypothèses simplificatrices de $f_{1,2}$ dues à M. J. BERNSTEIN, qui prédéterminent assez profondément la forme de la solution recherchée, ce qui pose le problème de leur compatibilité avec les résultats expérimentaux. Dans ce même chapitre nous insistons sur le fait que, ce que nous savons déterminer, c'est le spectre à partir de $f_{1,2}$ et que le problème que nous nous proposons de résoudre, c'est le problème inverse. En l'absence d'une analyse numérique rendue impossible par la complexité du problème, la comparaison des spectres expérimentaux et des spectres théoriques se fait par une méthode des moindres carrés.

Dans un deuxième chapitre (programmation et tests) nous présentons les programmes qui ont été élaborés et mis en oeuvre pour calculer les fonctions utiles pour le calcul et résoudre le système permettant d'obtenir $f_{1,2}$.

Enfin dans un dernier chapitre (dépouillement) nous présentons les résultats des dépouillements de 2 campagnes de tirs FOCUS, avec les fonctions de distribution trouvées et la comparaison avec les spectres expérimentaux, des spectres théoriques obtenus à partir des dites fonctions. Nous étudions également l'ajustement des paramètres du modèle et les limitations afférentes.

La conclusion s'efforce de faire le point sur la validité d'un tel modèle, compte tenu des derniers résultats obtenus.

En annexe nous présentons l'ensemble des calculs détaillés : trigonométrie sphérique, fonctions directes donnant le spectre à partir de $f_{1,2}$, problèmes d'unités et de programmation, dictionnaire, tests, mise en oeuvre de la méthode des moindres carrés.

2e PARTIE : ETUDE MATHEMATIQUE

Pour réaliser une décharge FOCUS, on remplit la chambre avec du Deutérium sous faible pression de 3 à 20 Torr et on commute le banc de condensateurs aux bornes de 2 électrodes. Après claquage aux extrémités de l'isolant se déroulent les phénomènes que nous avons dépeints dans l'introduction dont le plus important est la forte émission neutronique. C'est à partir des caractéristiques de cette émission, et en particulier à partir de son spectre, que nous voudrions remonter à la fonction de distribution des deutérons de la décharge. La réaction D-D donnant un neutron et un He^3, et sa section efficace seront donc les premiers éléments de notre étude. Par ailleurs, comme nous travaillons dans le système du laboratoire, nous devons expliciter toutes les quantités utilisées dans ce système.

I. MISE EN PLACE DU PROBLEME.

I.A. Réaction nucléaire dans le système du laboratoire.

La collision de deux deutérons de vitesses $\vec{v}_d$ et $\vec{v}_T$ (fig. 6) donne naissance à un neutron de vitesse $\vec{v}_{nl}$ (fig. 7) (direction $\vec{\Omega}_{nl}$) suivant la réaction

$$D + D \longrightarrow He^3 + n + Q$$

$$Q = 3,27 \text{ MeV}$$

Les quantités $\vec{v}_d$, $\vec{v}_T$, $\vec{v}_{nl}$ sont prises dans le système du laboratoire. On utilise comme système de coordonnées, les coordonnées sphériques

$$\vec{v} \longrightarrow (v, \theta, \varphi)$$

ou ce qui est équivalent

$$\vec{v} \longrightarrow (E, \theta, \varphi)$$

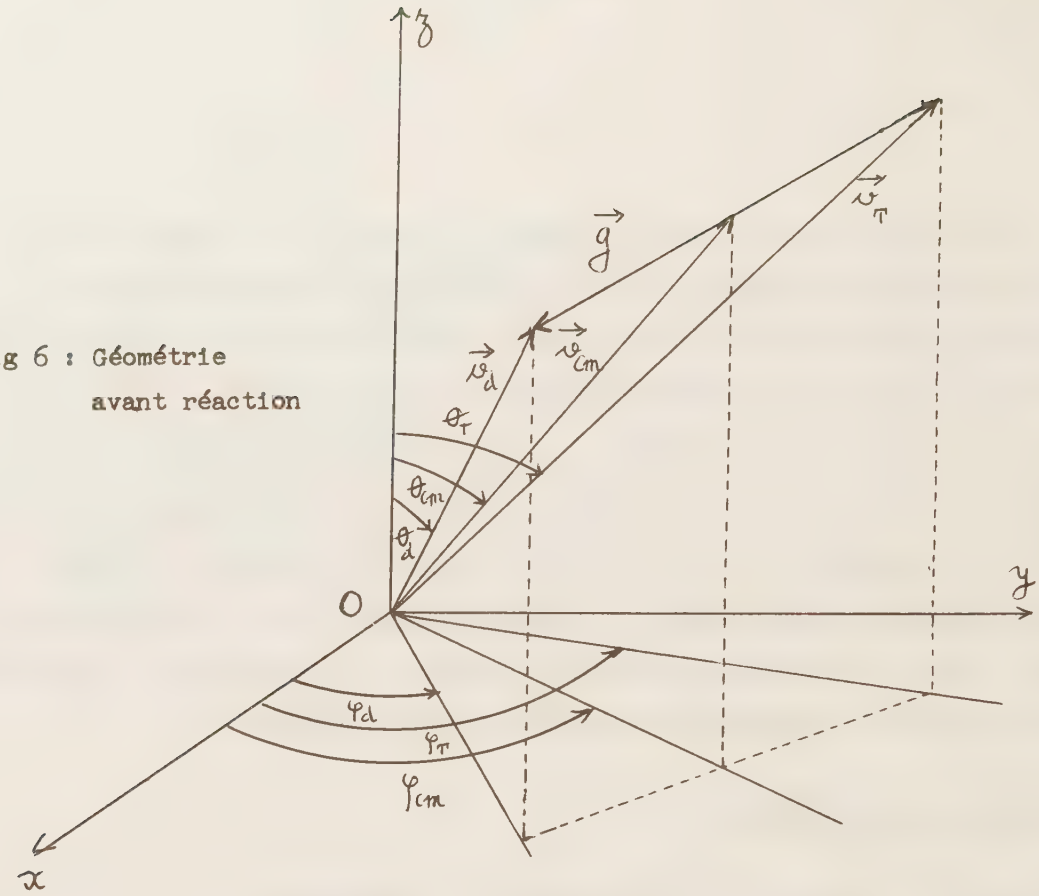


Fig 6 : Géométrie
avant réaction

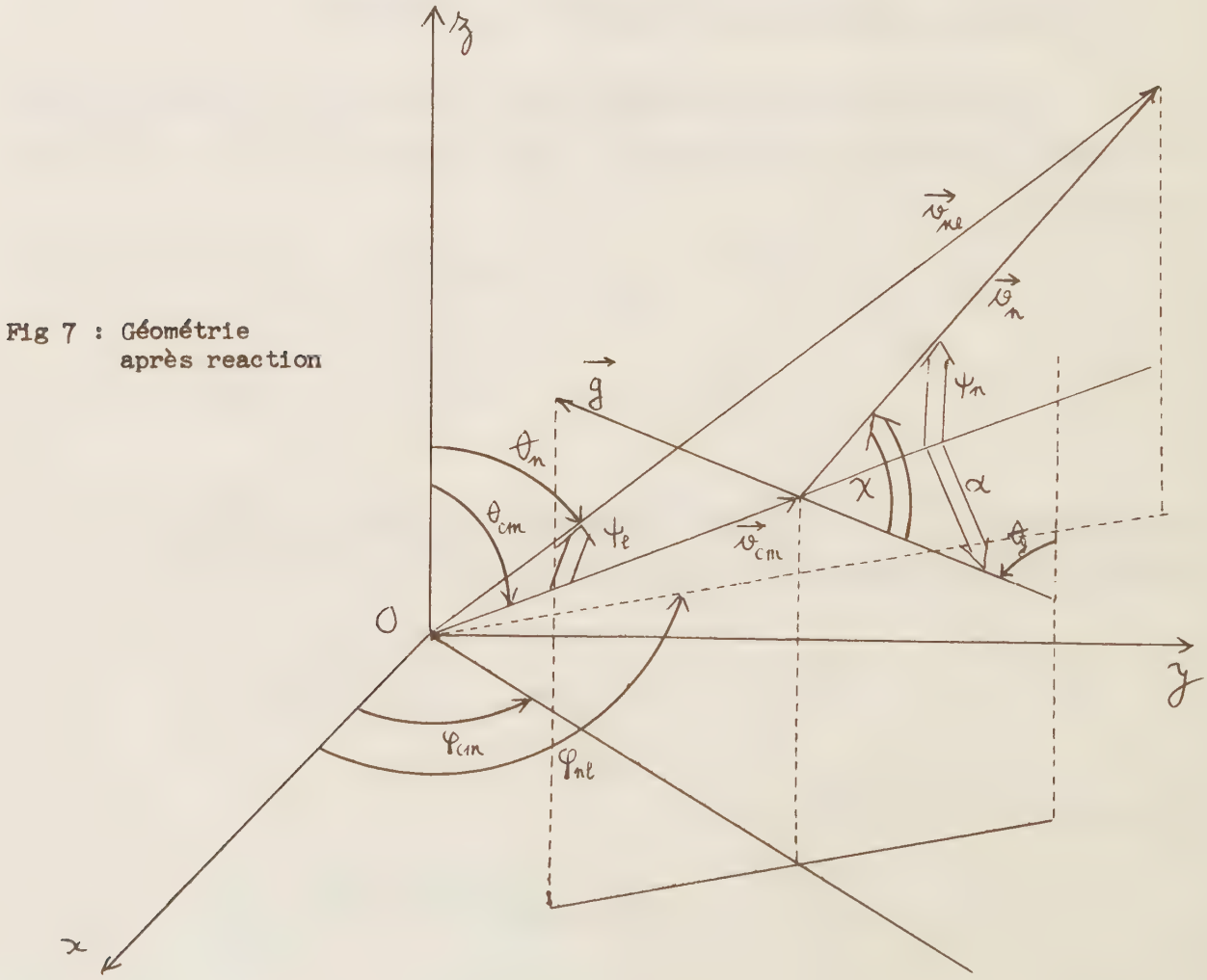


Fig 7 : Géométrie
après reaction

v module de $\vec{v}$

E énergie cinétique de la particule à vitesse $\vec{v}$

θ angle de colatitude

φ angle d'azimut

On indicera 1 les formes des fonctions en coordonnées sphériques.

Exemple :

$$f(v_d) \longrightarrow f^1(E_d, \theta_d)$$

pour une fonction à symétrie de révolution.

Si $\vec{v_n}$ (fig. 7) est la vitesse du neutron dans le système du centre de masse, on sait que, dans ce système, les relations de conservation de l'énergie et de l'impulsion s'écrivent :

$$\frac{1}{2} m_n v_n^2 = W_n = \frac{3}{4}\left(Q + \frac{E_B}{2}\right) \qquad (1)$$

où

$$\left.\begin{aligned} E_B &= \frac{1}{2} m_d g^2 && \text{énergie de bombardement} \\ \vec{g} &= \vec{v_d} - \vec{v_T} && \text{vitesse relative des deutérons} \end{aligned}\right\} (2)$$

g module de $\vec{g}$

avec m_n , masse du neutron, m_d , masse du deutéron

$$m_d = 2 m_n$$

Dans ce système du laboratoire, l'énergie E_n du neutron se met sous la forme

$$E_n = \frac{1}{2} m_n v_{nl}^2 = E_n\left(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi, \vec{\Omega}_{nl}\right)$$

En associant à (θ, φ) le vecteur $\vec{\Omega}$, de telle sorte que

$$\left(E, \vec{\Omega}\right) \longrightarrow \vec{v}$$

la vitesse $\vec{v}_{nl}$ du neutron dans le système du laboratoire (fig. 7) est donnée par la relation

$$\vec{v}_{nl} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_n \qquad (3)$$

où

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{v}_d + \vec{v}_\pi}{2} \qquad (4)$$

est la vitesse du centre de masse .

$$\left(E_n, \vec{\Omega}_{nl}\right) \longrightarrow \vec{v}_{nl}$$

I.B. Notion de flux dans le système du laboratoire.

Si on appelle $\sigma_d(\vec{v_d}, \vec{v_\pi}, \vec{\Omega}_{n\ell})$ la section efficace différentielle de la réaction précédent dans le système du laboratoire, et si on l'on connaît la fonction de distribution double des vitesses des deutérons au point $\vec{r}$ à l'instant t : $f^t_{1,2}(\vec{v_d}, \vec{v_\pi}, \vec{r}, t)$

l'on peut calculer le flux de neutrons émis au point $\vec{r}$, à l'instant t dans la direction $\vec{\Omega}_{n\ell}$, grâce à l'intégrale

$$\Phi(\vec{\Omega}_{n\ell}, \vec{r}, t) = \iint_{V_d \times V_\pi} f^t_{1,2}(\vec{v_d}, \vec{v_\pi}, \vec{r}, t)\, g\sigma_d(\vec{v_d}, \vec{v_\pi}, \vec{\Omega}_{n\ell})\, d^3\vec{v_d}\, d^3\vec{v_\pi}$$

V_d et V_π volumes supposés connus dans l'espace des vitesses.

I.C. Correspondance $f^t_{1,2} \longrightarrow \Phi_{f^t_{1,2}}$

La mesure du flux Φ dépend linéairement de $f^t_{1,2}$ et nous appellerons $\Phi_{f^t_{1,2}}(\vec{\Omega}_{n\ell}, \vec{r}, t)$ la valeur du flux correspondant à $f^t_{1,2}$.

II. PROBLEME INVERSE : DETERMINATION DE $f_{1,2}$ A PARTIR DES RESULTATS EXPERIMENTAUX.

II.A. Position du problème.

On essaie de déduire, à partir de l'émission neutronique donnée par la mesure du nombre de neutrons émis dans une direction, donc du flux, la répartition des deutérons dans la décharge, donnée par un fonction de distribution double des vitesses $f^t_{1,2}$ (dans toute sa généralité).

Les expérimentateurs entendaient confirmer ou infirmer l'hypothèse d'un régime correspondant à un modèle thermonucléaire. Il s'agissait donc de mettre en évidence une isotropie ou une anisotropie de l'émission neutronique. La grandeur utilisée étant le flux, des mesures ont été entreprises dans les deux directions 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Si on appelle Φ_M le flux mesuré, à supposer qu'on puisse le mesurer expérimentalement en fonction de l'espace (volume émissif) et du temps (durée de l'impulsion neutronique), on essaie de résoudre en $f^t_{1,2}$ l'équation :

$$\Phi_M\left(\vec{\Omega}_{nl}, \vec{r}, t\right) - \Phi_{f^t_{1,2}}\left(\vec{\Omega}_{nl}, \vec{r}, t\right) = 0$$

C'est le problème inverse du précédent : connaissant le flux, en déduire la répartition des deutérons.

De l'expression de $\Phi_{f^t_{1,2}}$, on voit immédiatement que le problème est sous-déterminé.

II.B. <u>1ère simplification (intégration dans l'espace et dans le temps)</u>.

Les mesures du flux dans une direction donnée, se font en intégrant sur le volume d'émission ΔV, que nous pouvons supposer approximativement égal au volume de la bulle observée par les expérimentateurs /6/, et sur le temps Δt , que nous prenons égal au double de la largeur à mi-hauteur de l'impulsion neutronique.

Nous allons donc considérer un flux moyen $\Phi_{f^t_{1,2}}\left(\vec{\Omega}_{nl}\right)$ que nous écrivons :

$$\Phi_{f^t_{1,2}}\left(\vec{\Omega}_{nl}\right) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \iint_{\Delta V \times \Delta t} \Phi_{f^t_{1,2}}\, d^3\vec{r}\, dt$$

$$\Phi_{f_{1,2}^t}(\vec{\Omega}_{n\ell}) = \iint_{V_d \times V_\pi} g\,\sigma_d\, d^3\vec{v}_d\, d^3\vec{v}_\pi \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{\Delta t} dt \int_{\Delta V} f_{1,2}^t(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi, \vec{r}, t)\, d^3\vec{r}$$

V_d et V_π volumes supposés connus.

En posant

$$f_{1,2}(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{\Delta t} dt \int_{\Delta V} d^3\vec{r}\, f_{1,2}^t(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi, \vec{r}, t)$$

on pourra écrire

$$\Phi_{f_{1,2}}(\vec{\Omega}_{n\ell}) = \iint_{V_d \times V_\pi} f_{1,2}(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi)\, g\, \sigma_d(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi, \vec{\Omega}_{n\ell})\, d^3\vec{v}_d\, d^3\vec{v}_\pi$$

et c'est $f_{1,2}$ qu'on va désormais tenter de déterminer.

II.C. Nouvelles hypothèses simplificatrices. Modèle de M. J. BERNSTEIN /4/.

Pour augmenter la détermination de l'équation $\Phi_M - \Phi_{f_{1,2}^t} = 0$ qui s'écrit maintenant, compte tenu de la simplification précédente :

$$\Phi_M(\vec{\Omega}_{n\ell}) - \Phi_{f_{1,2}}(\vec{\Omega}_{n\ell}) = 0$$

nous introduisons trois nouvelles hypothèses sur la structure de $f_{1,2}$, dues à M. J. BERNSTEIN.

La quantité $\Phi_M(\vec{\Omega}_{n\ell})$ est accessible à la mesure. En effet, le nombre de neutrons émis par la décharge dans une direction $\vec{\Omega}_{n\ell}$ et intégré sur tout le temps de l'émission neutronique est mesuré à courte distance

(2 m) à l'aide d'une sphère et d'un système de comptage de particules qui délivre en sortie une impulsion en tension.

Un étalonnage de cette chaîne à l'aide d'une source étalon, productrice de neutrons et placée à l'emplacement exact du volume émissif permet d'avoir directement le résultat en nombre de neutrons.

II.C.1. Séparation de $f_{1,2}$ en un produit.

C'est l'hypothèse classique de la non-corrélation :

$$f_{1,2}(\vec{v_d}, \vec{v_\pi}) = n_d f(\vec{v_d}) \times n_\pi F(\vec{v_\pi})$$

f et F fonctions de distribution simple des vitesses normalisées à 1.
n_d et n_π densités particulaires respectives.

II.C.2. Hypothèse de deux populations.

Les deux deutérons entrant en réaction pour donner un neutron et un He^3 peuvent être alors traités de diverses manières : leurs fonctions de distribution $f(\vec{v_d})$ et $F(\vec{v_\pi})$ peuvent être prises égales, auquel cas l'introduction d'un modèle thermonucléaire est possible. Nous avons affaire à une population de particules unique.

Les fonctions de distribution peuvent être prises différentes, ceci complique évidemment le problème, sauf si nous faisons une hypothèse simplificatrice sur une des fonctions.

On suppose f et F différentes et on donne à F une forme simplifiée.

$$F(\vec{v_\pi}) = \delta(\vec{v_\pi} - \vec{v_\pi^0})$$

ce qui donne pour $f_{1,2}$

$$f_{1,2}(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi) = n_d f(\vec{v}_d) \times n_\pi \delta(\vec{v}_\pi - \vec{v}_\pi^{\,o}) \qquad (5)$$

qui correspond à l'hypothèse de la séparation des deutérons en deux populations : deutérons accélérés de fonction de distribution $f(\vec{v}_d)$ et de densité n_d et deutérons-cibles à la vitesse $\vec{v}_\pi^{\,o}$ et de densité n_π. C'est ainsi que M. J. BERNSTEIN introduit un modèle faisceau-cible.

Grâce aux hypothèses faites, le problème se ramène à la détermination de $f(\vec{v}_d)$ et de $\vec{v}_\pi^{\,o}$ dans l'équation :

$$\mathcal{F}_M(\vec{\Omega}_{n\ell}) - \tilde{\Phi}_f(\vec{v}_\pi^{\,o}, \vec{\Omega}_{n\ell}) = 0$$

où

$$\tilde{\Phi}_f(\vec{v}_\pi^{\,o}, \vec{\Omega}_{n\ell}) = n_d n_\pi \int_{V_d} d^3\vec{v}_d \, f(\vec{v}_d) \, g \, \sigma_d(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi, \vec{\Omega}_{n\ell})$$

Sous cette forme, nous avons à déterminer :

- la fonction $f(\vec{v}_d)$ et le vecteur $\vec{v}_\pi^{\,o}$ vitesse de la cible
- le produit $n_d n_\pi$

On va montrer dans le paragraphe suivant que l'introduction des spectres nous permettra une détermination de $f(\vec{v}_d)$ et de $\vec{v}_\pi^{\,o}$, donc de

$$\int_{V_d} d^3\vec{v}_d \, f(\vec{v}_d) \, g \, \sigma_d(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi^{\,o}, \vec{\Omega}_{n\ell})$$

La connaissance expérimentale des flux Φ_M nous permettra alors de déterminer le produit $n_d n_T$.

II.C.3. Symétrie azimutale de f .

Le montage expérimental présente un axe de symétrie azimutale (fig. 1). Les fronts d'onde (front d'ionisation et front de choc) se développent perpendiculairement à cet axe, comme il a été montré dans l'introduction. Nous ne pouvons donc en première approximation, supposer les vitesses des particules-cibles parallèles à cette direction : donc l'axe de symétrie azimutale dans le système du laboratoire est choisi suivant $\vec{v}_T^{\,0}$, direction des particules-cibles. Dorénavant, nous appellerons $\vec{v}_n$ leur vitesse, la vitesse étant prise vers l'avant (fig. 8). C'est un paramètre du calcul désigné par $(E_T, 0, 0)$ dans le repère sphérique, dont nous avons parlé au début et que nous avons ainsi déterminé. Il est évident que ce choix va entraîner des singularités, dans les directions $\theta_n = 0$ et $\theta_n = \pi$, et $\theta_d = 0 \hookrightarrow \pi$ vis-à-vis du calcul. Cela correspond au fait physique que la vitesse v_T possède une direction déterminée.

On fait alors l'hypothèse d'une distribution des vitesses des deutérons accélérés à symétrie azimutale, ce qui s'écrit :

$$f(v_d) = f^1(E_d, \theta_d)$$

En conclusion, $f^1(E_d, \theta_d)$ fonction de distribution des deutérons accélérés est une fonction qui présente les caractéristiques suivantes, en dehors du fait de ne pas dépendre de φ_d :

- en énergie, elle a un support borné $\left[E_d^2, E_d^1\right]$, E_d^2 représentant l'énergie de séparation des 2 types de particules (accélérées et cibles) ou l'énergie minimum des particules accélérées, E_d^1 représentant l'énergie maximum.

Notons que cette présentation simplifiée présente des difficultés pour la détermination de l'énergie de coupure basse. Nous essaierons de discuter plus tard cette notion ;

- en angle, nous prenons, au départ, pour θ_d l'intervalle $\left[0, \pi\right]$;
- $f^1(E_d, \theta_d)$ est une fonction positive sur tout son intervalle de définition ;
- $f^1(E_d, \theta_d)$ est une fonction normalisée à 1:

$$N(f) = \int_{V_d} f(\vec{v}_d)\, d^3\vec{v}_d = 1$$

II.C.4. Expression définitive du flux en fonction de f^1.

$$\vec{v}_d \longrightarrow (E_d, \theta_d, \varphi_d)$$
$$\vec{v}_{nl} \longrightarrow (E_n, \theta_n, \varphi_{nl})$$

A partir de ces données, on tire l'expression de Φ_{f^1}, dans le système du laboratoire :

$$\Phi_{f^1}(E_\pi, \theta_n, \varphi_{nl}) = n_d n_\pi \int_{V_d} d^3\vec{v}_d\, f^1(E_d, \theta_d)\, g\, \sigma_d(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi, \theta_n, \varphi_{nl}) \qquad (6)$$

$\vec{g}$ présente la symétrie azimutale, tout comme f^1.
L'ensemble du système présentant la symétrie azimutale, nous faisons

$$\varphi_{nl} = 0$$

c'est-à-dire que nous prenons l'azimut du détecteur pour origine et que nous désignons désormais par $\Phi_M(\theta_n)$ la mesure du flux.

II.D. Notion de spectre : formulation de LEHNER et POHL /7/.

Nous avons, grâce à une série d'hypothèses simplificatrices raisonnables sur $f_{1,2}$, diminué la sous-détermination du problème initial. Un autre moyen peut être de chercher une donnée expérimentale plus riche que le flux.

Nous allons introduire la notion de spectre, grâce à une formulation due à LEHNER et POHL /7/ et qui s'appuie sur le théorème de désintégration de la mesure (cela revient à étudier un changement de variables singulier, présentant deux singularités).

Si on part de $\Phi_{f_{1,2}}(\vec{\Omega}_{n\ell})$ qu'on peut écrire sous la forme :

$$\Phi_{f_{1,2}}(\vec{\Omega}_{n\ell}) = \iint_{V_d \times V_\pi} d^3\vec{v}_d \wedge d^3\vec{v}_\pi \; f_{1,2}\, g\, \sigma_d$$

en utilisant la notation des produits extérieurs $\wedge$.

Connaissant W_n et la forme $E_n(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi, \vec{\Omega}_{n\ell})$ de l'énergie du neutron dans le système du laboratoire, on en déduit que :

$$dE_n \wedge d^3\vec{v}_d \wedge d^3\vec{v}_\pi = 0$$

Pour faire apparaître une variation en E, donc un spectre, il faut écrire :

$$\Phi_{f_{1,2}}(\vec{\Omega}_{n\ell}) = \int_0^\infty dE \wedge \iint d^3\vec{v}_d \wedge d^3\vec{v}_\pi \; f_{1,2}\, g\, \sigma_d\, \delta(E - E_n)$$

ceci, en vertu du théorème de la désintégration de la mesure /8/.

E est l'énergie du neutron écrite sous forme de variable courante.

$\delta(E - E_n)$ est l'impulsion de Dirac. Nous utilisons la notation classique des physiciens pour simplifier l'écriture.

Le flux Φ peut donc se mettre sous la forme

$$\Phi_{f_{1,2}}(\vec{\Omega}_{n\ell}) = \int_0^\infty dE \; S_{f_{1,2}}(E, \vec{\Omega}_{n\ell})$$

où

$$S_{f_{1,2}}(E, \vec{\Omega}_{n\ell}) = \iint_{V_d \times V_\pi} d^3\vec{v}_d \; d^3\vec{v}_\pi \; f_{1,2}(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi)\, g\, \sigma_d(\vec{v}_d, \vec{v}_\pi, \vec{\Omega}_{n\ell})\, \delta(E - E_n)$$

Si maintenant on travaille avec la fonction f^1 on écrira

$$S_{f^1}(E_T, E, \theta_n, \varphi_{nl}) = n_d n_T \int_{V_d} d^3\vec{v}_d \, f^1(E_d, \theta_d) \, g\sigma_d(\vec{v}_d, \vec{v}_T, \theta_n, \varphi_{nl}) \, \delta(E - E_n) \quad (7)$$

avec

$$N(f^1) = \int_{V_d} d^3\vec{v}_d \, f^1(E_d, \theta_d) = 1$$

$$\Phi_{f^1}(E_T, \theta_n, \varphi_{nl}) = \int_{E^2}^{E^1} dE \, S_{f^1}(E_T, E, \theta_n, \varphi_{nl}) \quad (8)$$

On travaille de même avec $\varphi_{nl} = 0$ dans l'expression du spectre.

Les bornes E^2 et E^1 sur l'énergie du neutron émis dans la réaction nucléaire sont déterminées fondamentalement par le fait que les deutérons ont une énergie bornée supérieurement (E_d^1). Ces bornes sont des fonctions également de E_T et de θ_n . E^2 et E^1 sont le résultat des calculs de restriction d'intervalle de variation due à la présence de la Dirac dans le premier étage d'intégration. S_{f^1} désignera la forme analytique obtenue, une fois tous les calculs faits.

II.E. Utilisation du spectre pour le calcul de f^1 et de E_T.

Après avoir étudié les flux, les expérimentateurs ont commencé l'études des spectres. L'étude des flux avait permis de mettre en évidence des régimes avec égalité des flux à 0 et à $\frac{\pi}{2}$, et d'autres avec de fortes différences (1 à 1,5) or comme l'égalité des flux peut cacher des spectres différents donc une anisotropie, il a paru indispensable de mesurer des spectres. Pour les problèmes d'unités, nous renvoyons à l'annexe E.

Nous rappelons que pour ce faire, les expérimentateurs utilisent une méthode de temps de vol consistant à disposer à une distance $L_1(\theta_n)$ de la source (sans collimation), un système de détection constitué d'un scintillateur effectuant la conversion neutron-photon et un PM dont la sortie analogique est branchée à un oscilloscope. On obtient ainsi une courbe en volt $\widetilde{S}_M(t,\theta_n)$ en fonction du temps t qui est l'image d'un nombre de neutrons en fonction de l'énergie. Une conversion élémentaire $t \rightarrow E$ dont nous avons déjà parlé dans l'introduction et que nous étudierons plus loin transforme le signal électrique $\widetilde{S}_M(t,\theta_n)$ en une réponse en fonction de l'énergie $S_M(E,\theta_n)$. C'est à partir de cette réponse $S_M(E,\theta_n)$ que nous pouvons remonter, à un facteur d'échelle près, au spectre neutronique $S^0_M(E,\theta_n)$ au moyen des corrections suivantes :

- l'atténuation dans l'air ;
- l'angle solide sous lequel le scintillateur est vu de la source ;
- la réponse du scintillateur en fonction de l'énergie des neutrons ;
- le gain du PM ;
- la sensibilité de l'oscilloscope.

Ces corrections sont réalisées de la manière suivante :

- pour l'atténuation, on utilise la section efficace totale (tout évènement sur le parcours élimine le neutron) ;
- pour la réponse du scintillateur, nous utilisons une simulation numérique utilisant une méthode de Monte-Carlo (code 05S [15]) ;
- pour le gain du PM, il est repéré (par rapport au gain du PM dans la direction $\frac{\pi}{4}$), mais non étalonné.

Cette absence d'étalonnage explique pourquoi le spectre n'est connu qu'à un facteur d'échelle près (la description des corrections est faite au paragraphe IV. B.2).

Le facteur de transfert qui permet de passer de $S^0_M(E,\theta_n)$ à $S_M(E,\theta_n)$ est une fonction connue.

Nous rappelons qu'en flux, on avait l'équation :

$$\widetilde{\Phi}_M(\theta_n) - \widetilde{\Phi}_{f1}(E_T,\theta_n) = 0 \qquad (9)$$

où f^1 est une fonction normalisée à 1 dans l'espace des vitesses.

et qu'entre $\Phi_{f1}(E_T, \theta_n)$ et $S_{f1}(E_T, E, \theta_n)$

on a également

$$\Phi_{f1}(E_T, \theta_n) = \int_{E^2}^{E^1} dE\, S_{f1}(E_T, E, \theta_n)$$

Entre les valeurs mesurées $\Phi_M(\theta_n)$ et $S_M^0(E, \theta_n)$ cette relation n'est malheureusement pas vérifiée puisque l'on vient de faire remarquer que $S_M^0(E, \theta_n)$ est déterminé à un facteur d'échelle près.

Nous ne pouvons donc pas obtenir entre $S_M^0(E, \theta_n)$ et $S_{f1}(E_T, E, \theta_n)$ la même équation qu'entre Φ_M et Φ_{f1}, sauf si ce facteur avait été déterminé expérimentalement, ce qui n'est pas le cas.

Mais, comme il ne s'agit que d'un facteur de proportionnalité rigoureusement indépendant de E et de θ_n et que S_{f1} dépend linéairement de f^1, nous pouvons écrire une équation identique, en recherchant la solution sous la forme d'une fonction non normalisée $j^1(E_d, \theta_d)$.

$$S_M^0(E, \theta_n) - S_{j1}(E_T, E, \theta_n) = 0 \qquad (10)$$

Nous obtiendrons donc la solution de cette équation sous la forme d'une fonction j^1 proportionnelle à f^1 en vertu de la remarque précédente ; le calcul de la norme de j^1, qui est donc la fonction connue, nous permettra d'obtenir f^1 :

$$f^1(E_d, \theta_d) = N^{-1}(j^1) \times j^1(E_d, \theta_d) \qquad (11)$$

L'obtention de f^1 nous permet de calculer

$$U_{f1}(E_T, E, \theta_n) = \int_{V_d} d^3\vec{v}_d\, f^1(E_d, \theta_d)\, g\, \sigma_d\, \delta(E - E_n) \qquad (12)$$

Par une nouvelle intégration

$$n_d n_T \int_{E^2}^{E^1} dE\, U_{f^1}(E_T, E, \theta_n) = \Phi_{f^1}(E_T, \theta_n) = \tilde{\Phi}_M(\theta_n) \qquad (13)$$

on détermine $n_d n_T$

III. ETUDE DE LA TRANSFORMATION $f^1 \longrightarrow S_{f^1}$, DANS LE CADRE DES HYPOTHESES DE M. J. BERNSTEIN.

III.A. Présentation de Φ_{f^1} et de S_{f^1} dans le système du laboratoire.

III.A.1. Flux Φ_{f^1}

Les calculs pratiques sont faits dans le système de coordonnées sphériques du laboratoire dont $\vec{v}_T$ est l'axe des azimuts (fig. 8).

En conséquence les éléments différentiels utilisés deviennent :

$$d^3\vec{v}_d = \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta_d\, dE_d\, d\theta_d\, d\varphi_d$$

$$d^2\vec{\Omega}_{nl} = \sin\theta_n\, d\theta_n\, d\varphi_{nl}$$

Il résulte des considérations du paragraphe II, qu'on peut alors écrire le flux sous la forme :

$$\Phi_{f^1}(E_T, \theta_n, \varphi_{nl}) = n_d n_T \int_{E_d^1}^{E_d^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_T)\, \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_T, \theta_n) \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta_d\, dE_d\, d\theta_d\, d\varphi_d \quad (14$$

où nous rappelons que σ_d^1 est l'expression de σ_d en coordonnées sphériques,

$\left[E_d^2, E_d^1\right]$ est le support de la fonction f^1 en E_d.

Nous rappelons qu'en vertu du théorème de la désintégration de la mesure, nous pouvons écrire :

$$\widetilde{\Phi}_{f^1}(E_\pi, \theta_n, \varphi_{nl}) = \int_0^{+\infty} dE\, n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_\pi)\, \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{nl})\, \delta(E - E_n) \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta_d\, dE_d\, d\theta_d\, d\varphi_d$$

ou encore

$$\Phi_{f^1}(E_\pi, \theta_n, \varphi_{nl}) = \int_{E^2}^{E^1} dE\, S_{f^1}(E_\pi, E, \theta_n, \varphi_{nl})$$

La fonction f^1 répondant à la condition de normalisation à 1, vérifie :

$$N(f^1) = \int_{E_d^2}^{E_d^1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} dE_d\, d\theta_d\, d\varphi_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta_d\, f^1(E_d, \theta_d)$$

$$= 2\pi \int_{E_d^2}^{E_d^{-1}}\int_0^{\pi} dE_d\, d\theta_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta_d\, f^1(E_d, \theta_d) = 1 \qquad (15)$$

III.A.2. Spectre S_{f^1}

De l'équation (7) de S_{f^1}, on déduit en coordonnées sphériques :

$$S_{f^1}(E_\pi, E, \theta_n, \varphi_{nl}) = n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta_d\, d\theta_d\, d\varphi_d\, f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_\pi)\, \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{nl}) \times \delta(E - E_n)$$

où

$$E_n = E_n(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{n\ell})$$

Deux cas se présentent alors :

III.A.2.a. σ_d^1 et E_n fonction de φ_d.

Si σ_d^1 et E_n dépendent de φ_d :

$$\sigma_{f1}(E_\pi, E, \theta_n, \varphi_{n\ell}) = n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_\pi) \int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{n\ell}) \delta(E - E_n)\, d\varphi_d \quad (16)$$

Un théorème sur les distributions, explicité dans MESSIAH [9] nous permet d'écrire

$$\delta(E - E_n) = \sum_i \frac{\delta(\varphi_d - \varphi_d^i)}{\left|\frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d}\right|_{\varphi_d = \varphi_d^i(E)}} \quad (17)$$

où les quantités $\varphi_d^i(E)$ sont les solutions de l'équation

$$E = E_n(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{n\ell}) \quad (18)$$

pour E fixé.

où $\left|\frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d}\right|_{\varphi_d = \varphi_d^i(E)} \neq 0$, ce qui signifie que la racine φ_d^i n'est pas une racine double.

On peut écrire d'après (17)

$$\int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{n\ell}) \delta(E - E_n)\, d\varphi_d = \sum_i \left[\frac{\sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{n\ell})}{\left|\frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d}\right|} \right]_{\varphi_d = \varphi_d^i(E)}$$

En définitive, nous avons deux cas à considérer quand E_n et σ_d^1 dépendent de φ_d :

$E = E_n$ a des solutions en φ_d, c'est-à-dire E appartient au domaine de variation de E_n en fonction de φ_d et nous écrivons, pour $\frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d} \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_n, \theta_n, \varphi_{n\ell})\, \delta(E - E_n)\, d\varphi_d = \sum_i \left[\frac{\sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_n, \theta_n, \varphi_{n\ell})}{\left| \frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d} \right|} \right]_{-\varphi_d = \varphi_d^i(E)} \tag{19}$$

Nous étudions à part l'occurence $\frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d} = 0$

$E = E_n$ n'a pas de solution en φ_d, c'est-à-dire E n'appartient pas au domaine de variation de E_n en fonction de φ_d, nous écrivons alors :

$$\int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_n, \theta_n, \varphi_{n\ell})\, \delta(E - E_n)\, d\varphi_d = 0 \tag{20}$$

III.A.2.b. σ_d^1 et E_n indépendants de φ_d.

Si σ_d^1 et E_n ne dépendent pas de φ_d, mais seulement de E_d et de θ_d, S_{f1} devient

$$S_{f1}(E_n, E, \theta_n, \varphi_{n\ell}) = 2\pi n_d n_n \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi} d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_n)\, \sigma_d^1(E_d, \theta_d, E_n, \theta_n, \varphi_{n\ell})\, \delta(E - E_n)$$

Nous appliquons le théorème précédent à θ_d

$$\delta(E - E_n) = \sum_i \left[\frac{\delta(\theta_d - \theta_d^i)}{\left| \frac{\partial E_n}{\partial \theta_d} \right|} \right]_{\theta_d = \theta_d^i(E)}$$

où $\theta_d^i(E)$ est la solution, à E donné, de l'équation

$$E = E_n(E_d, \theta_d, E_n, \theta_n, \varphi_{n\ell})$$

ce qui conduit à l'égalité :

$$\int_0^{\pi} f^1 g \sigma_d^1 \delta(E - E_n) \sin\theta_d \, d\theta_d = \sum_i \left[\frac{f^1 g \sigma_d^1}{\left| \frac{\partial E_n}{\partial \theta_d} \right|} \right]_{\theta_d = \theta_d^i(E)} \tag{21}$$

La même distinction que précédemment va apparaître :

$E = E_n$ a des racines en θ_d ; ce qui signifie que E appartient au domaine de variation de E_n en fonction de θ_d , et nous écrivons, pour

$$\int_0^{\pi} f^1 g \sigma_d^1 \delta(E - E_n) \sin\theta_d \, d\theta_d = \sum_i \left[\frac{f^1 g \sigma_d^1}{\left| \frac{\partial E_n}{\partial \theta_d} \right|} \right]_{\theta_d = \theta_d^i(E)}$$

nous étudierons à part le cas $\frac{\partial E_n}{\partial \theta_d} = 0$

$E = E_n$ n'a pas de racine en θ_d , ce qui signifie que E n'appartient pas au domaine de variation de E_n en fonction de θ_d , nous écrivons alors :

$$\int_0^{\pi} f^1 g \sigma_d^1 \delta(E - E_n) \sin\theta_d \, d\theta_d = 0 \tag{22}$$

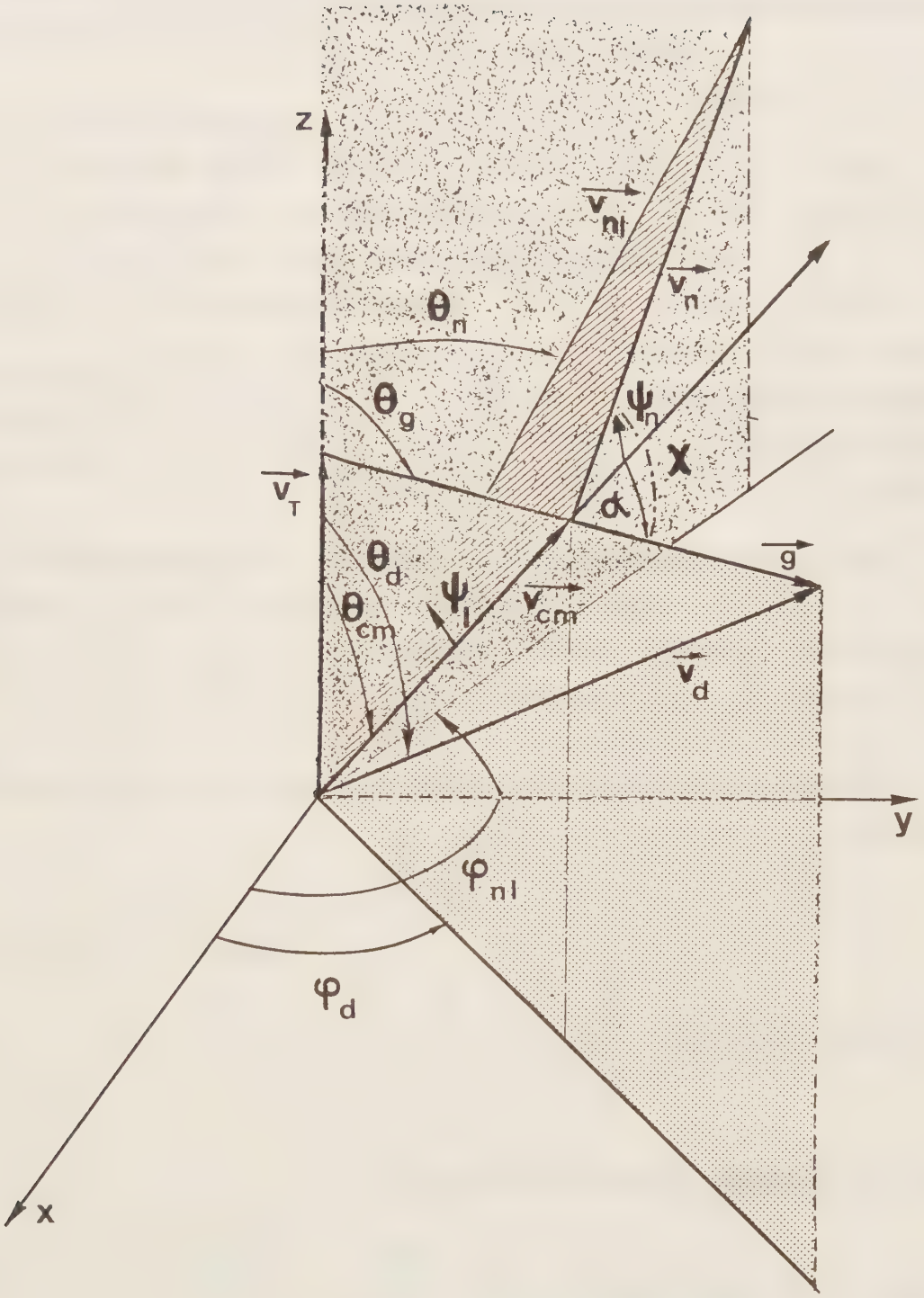


Fig. 8 : Géométrie de la réaction

III.B. Résultats concernant les calculs pratiques.

III.B.1. Géométrie.

L'axe des z est pris suivant $\vec{v}_\pi$ et dans le même sens (fig. 8 et fig. A5). On prend

$$\varphi_{n\ell} = 0$$

Lorsque φ_d varie de 0 à π, toutes les autres quantités ($E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_\pi$) restant fixes, le plan de base est le plan ($\vec{v}_{cm}$, $\vec{g}$). Ce plan se décompose en deux demi-plans ($\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}_d$) et ($\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}_\pi$) définissant 2 orientations angulaires supplémentaires. Le triangle ($\vec{v}_d$, $\vec{v}_\pi$, $\vec{g}$) tourne autour de Oz sans se déformer quand φ_d varie.

Le plan du neutron émis est le plan ($\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}_n$) contenant le triangle ($\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}_n$, $\vec{v}_{n\ell}$). Quand E_d, θ_d, restent constants et que φ_d seul varie, $\vec{v}_n$ est un vecteur de module constant dont une extrémité est attaché à l'extrémité du vecteur $\vec{v}_{cm}$ et l'autre glisse sur la droite $\vec{v}_{n\ell}$ représentant la direction (θ_n, 0).

La figure 8 nous donne les éléments essentiels avec leurs relations (relations (2), (3), (4))

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{v}_d + \vec{v}_\pi}{2}$$

$$\vec{g} = \vec{v}_d - \vec{v}_\pi$$

$$\vec{v}_{n\ell} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_n$$

On définit par ailleurs les angles suivants :

$$\left.\begin{aligned} (\vec{v}_{cm}, \vec{v}_n) &= \psi_n \\ (\vec{v}_{cm}, \vec{v}_{n\ell}) &= \psi_\ell \\ (\vec{g}, \vec{v}_n) &= \chi \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Ces différentes entités nous permettent en particulier de passer du système du centre de masse au système du laboratoire. (Annexe A).

III.B.2. Trigonométrie.

On travaille dans le système du laboratoire. Les quantités exprimées initialement dans le sytème du centre de masse comme $\sigma_d(g,\chi)$ doivent donc être exprimées dans ce système.

Le calcul explicite de $S_{f1}(E_\tau, E, \theta_n)$ qui est la nouvelle expression de S_{f1} avec $\varphi_{n\ell} = 0$ s'obtient donc en donnant les expressions dans ce système de $g(E_d, \theta_d, E_\tau)$, de $\sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\tau, \theta_n)$ et de $E_n(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\tau, \theta_n)$.

Pour simplifier la présentation des différentes quantités, on introduit

$$\rho = \frac{v_\tau}{v_d} = \sqrt{\frac{E_\tau}{E_d}} \qquad (24)$$

$$\gamma = \frac{v_{cm}}{v_n} = \sqrt{\frac{E_{cm}}{2W_n}}$$

On obtient en particulier

$$E_B = \frac{1}{2} m_d g^2 = E_d(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta_d)$$

$$E_n = W_n(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\psi_n) \qquad (25)$$

$$\sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\tau, \theta_n) = \frac{\sigma_n(g)}{4\pi} \cdot \frac{1 + A(E_g)\cos^2\chi + B(E_g)\cos^4\chi}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n)^{\frac{3}{2}}}{1 + \gamma\cos\psi_n} \qquad (26)$$

La quantité W_n dépend de E_d et de θ_d.

Les quantités ψ_n, χ, E_n dépendent de E_d, θ_d, φ_d, E_π, θ_n.

Tous ces calculs sont faits dans l'annexe A, de même qu'y est étudiée la quantité

$$\left| \frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d} \right| = 2\gamma W_n \sin\theta_{cm} \sin\theta_n \sin\varphi_d \frac{\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n\right)^{\frac{3}{2}}}{1+\gamma\cos\psi_n}$$

III.B.3. Expressions explicitées de S_{f1}

On a vu qu'il y avait 3 cas à envisager.

III.B.3.a. E_n et σ_d^1 dépendent de φ_d, $\theta_n \neq 0, \pi$

On obtient d'après la formule (19)

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_{\theta_d^E}^{\theta_d^E} f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_\pi)\, \sigma^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) \sin\theta_d\, d\theta_d \qquad (27)$$

avec l'expression de σ^*

$$\sigma^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) = \frac{\sigma_\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{1}{\gamma W_n \sin\theta_{cm} \sin\theta_n \sin\varphi_d^E} \qquad (28)$$

où φ_d^E est la solution comprise entre 0 et π de

$$\cos\varphi_d^E = \frac{\dfrac{E - W_n(1-\gamma^2)}{2\gamma\sqrt{E W_n}} - \cos\theta_{cm}\cos\theta_n}{\sin\theta_{cm}\sin\theta_n} \qquad (29)$$

Le détail de ces calculs est donné dans l'annexe B. En particulier on y fait l'étude des domaines d'intégration permettant de calculer les quantités E_d^{min}, ${}^1\theta_d^E$, ${}^2\theta_d^E$ et de donner les valeurs d'annulation de S_{f1} .

cos χ^E se calcule en fonction de φ_d donc de E grâce à la formule :

$$\cos\chi^E = \frac{1}{\sin\theta_{cm}}\left[\gamma\cos\theta_{cm}\sin(\theta_g-\theta_{cm}) + \sin\theta_g\cos\psi_n^E - \cos\theta_n\sin(\theta_g-\theta_{cm})\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n^E\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (30)$$

$$\cos\psi_n^E = \frac{E - W_n(1+\gamma^2)}{2\gamma W_n}$$

III.B.3.b. E_n et σ_d^1 ne dépendent pas de φ_d $\theta_n = 0, \pi$.

III.B.3.b.α. $\theta_n \equiv 0$.

Les quantités ψ_p , ψ_n, χ , E_n et σ_d^1 ne dépendent plus de φ_d
On obtient d'après la formule (21)

$$\left.\begin{aligned} S_{f1}(E_r,E,\theta_n) &= 2\pi n_d n_r \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} f^1(E_d,\theta_d^E)\, g(E_d,\theta_d^E,E_r)\cdot\frac{\sigma_r}{4\pi}\cdot\frac{1+A\cos^2\chi^E+B\cos^4\chi^E}{1+\frac{A}{3}+\frac{B}{5}}\cdot\frac{\sqrt{8E}}{T_0} \\ T_0 &= \sqrt{3}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}E_d E}-E_d\rho\right)^{\frac{1}{2}}\left[-2\rho E_d E+\sqrt{\tfrac{1}{2}E_d E}\left\{2Q+E_d(1+3\rho^2)\right\}-\rho E_d\left\{\frac{Q}{2}+\frac{E_d}{2}(1+\rho^2)\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_d^E &= \frac{E-\frac{3}{4}Q-\frac{E_d}{4}(1+\rho^2)-\rho\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}}{\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}-E_d\rho} \\ \chi^E &= \psi_n^E + (\theta_g^E - \theta_{cm}^E) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

θ_g et θ_{cm} dépendent de θ_d , donc de E . Les calculs, ainsi que l'étude des domaines d'intégration, sont développés dans l'annexe C.

II.B.3.b.β . $\theta_n = \pi$

On obtient d'après la formule (21)

$$S_{f1}(E_T, E, \theta_n) = 2\pi n_d n_T \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} f^1(E_d, \theta_d^E) g(E_d, \theta_d^E, E_\pi) \cdot \frac{\sigma_\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_\pi} \qquad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} T_\pi &= \sqrt{3}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}E_d E} + E_d\rho\right)^{\frac{1}{2}}\left[2\rho E_d E + \sqrt{\tfrac{1}{2}E_d E}\left\{2Q + E_d(1+3\rho^2)\right\} + \rho E_d\left\{\frac{Q}{2} + \frac{E_d}{2}(1+\rho^2)\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \cos\theta_d^E &= \frac{E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}(1+\rho^2) - \rho\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}}{-\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho} \\ \chi^E &= \psi_n^E - \theta_g^E + \theta_{cm}^E \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Les calculs sont développés dans l'annexe C.

II.B.3.C. Etude d'un spectre isotrope

S_{f1} prend une forme simple et pratiquement accessible au calcul analytique, quand on fait $E_T = 0$ et f^1 isotrope. Dans ce cas on peut écrire, comme on le montrera dans l'annexe D, formule (D9) :

$$S_{f1}(0, E, 0) = S_{f1}(0, E, \theta_n) = S_{f1}(0, E, \tfrac{\pi}{2}) = S_{f1}(0, E, \pi)$$

L'étude de la quantité S_{f1} obtenue est faite complètement dans l'annexe C. Les courbes calculées sont tracées dans la quatrième partie : dépouillements (fig. 10, 11, 14, 15, 18).

IV. RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE. NECESSITE DE L'ETABLISSEMENT D'UN DICTIONNAIRE /10/.

IV.A. Etude de la transformation $f^1 \longrightarrow S_{f^1}$

On a d'après les formules (27), (31), (33) :

Dans le cas $\theta_n \neq 0, \pi$

$$S_{f^1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_{\theta_d^E}^{\theta_d^E} f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_\pi) S^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) \sin\theta_d \, d\theta_d$$

Dans le cas $\theta_n = 0$

$$S_{f^1}(E_\pi, E, 0) = n_d n_\pi 4\pi \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} f^1(E_d, \theta_d^E) g(E_d, \theta_d^E, E_\pi) \frac{\sigma_\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{2E}}{T_0} \cdot \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} dE_d$$

Dans le cas $\theta_n = \pi$

$$S_{f^1}(E_\pi, E, \pi) = n_d n_\pi 4\pi \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} f^1(E_d, \theta_d^E) g(E_d, \theta_d^E, E_\pi) \frac{\sigma_\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{2E}}{T_\pi} \cdot \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} dE_d$$

L'application $f^1 \longrightarrow S_{f^1}$ est une application linéaire : le vecteur f^1 peut donc être développé suivant une base. C'est cette base qu'on va maintenant rechercher.

IV.A.1. Recherche d'une base de l'espace des fonctions f^1.

On sait que la fonction de distribution simple des vitesses $f(\vec{v_d})$ définie par la formule (5) peut être développée en harmonique sphérique dans l'espace des vitesses /11/.

Etant donnée la symétrie azimutale, ce développement se réduit à :

$$f(\vec{v_d}) = \sum_{l \geq 0} \alpha_l(v_d) C_l = f^1(E_d, \vartheta_d)$$

avec

$$C_l = v_d^l P_l(\cos\vartheta_d)$$

où P_l est le polynôme de Legendre d'ordre l en $\cos\vartheta_d$

$$f(\vec{v_d}) = \sum_{l \geq 0} \alpha_l(v_d) v_d^l P_l(\cos\vartheta_d)$$

Nous avons été amenés à utiliser pour f^1 un développement en polynôme de Legendre en $\cos\vartheta_d$ formant une suite totale.

Si nous passons à la variable énergie, nous pourrons donc écrire :

$$f^1(E_d, \vartheta_d) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \beta_l(E_d) P_l(\cos\vartheta_d)$$

Dans l'analyse, nous nous limiterons en fait à un développement en 4 termes, soit l'approximation suivante :

$$f^1(E_d, \vartheta_d) = \sum_{l=0}^{l=3} \gamma_l \beta_l(E_d) P_l(\cos\vartheta_d)$$

On constate alors que, si l'on prend $\beta_l(E_d)$ indépendant de l /4/, par exemple :

$$\beta_l(E_d) \sim E_d^{-4}$$

on peut trouver une solution satisfaisant à la contrainte de positivité.

1°) Pour raffiner, on pourrait écrire

$$f^1(E_d, \theta_d) = \beta_0(E_d) \sum_{l=0}^{l=3} \gamma_l P_l(\cos\theta_d)$$

et faire les calculs avec une fonction $\beta_0(E_d)$ contenant un terme en E_d^{-4} et un terme en E_d^{-3} .

En fait cette complication supplémentaire ne semble pas donner d'amélioration.

2°) D'autre part, aller plus loin en développement angulaire n'est pas nécessaire à l'heure actuelle, vu le petit nombre de directions de mesure.

Le point essentiel en la matière est de satisfaire à la contrainte de positivité.

Cette condition particulièrement délicate à vérifier est atteinte très facilement, dans certaines conditions de dépouillement, avec une bonne stabilité, pour un développement de la forme :

$$f^1(E_d, \theta_d) = E_d^{-n}\left(a_{0,-2n} + a_{1,-2n}\cos\theta_d + a_{2,-2n}\cos^2\theta_d + a_{3,-2n}\cos^3\theta_d\right) \quad (35)$$

3°) Pour aller plus loin, nous pourrions écrire :

$$f^1(E_d, \theta_d) = \sum_{\substack{i,j \\ i\geq 0 \\ j\in\mathbb{Z}}} a_{i,j}\, E_d^{j/2} \cos^i\theta_d$$

ou encore

$$f^1(E_d, \theta_d) = \sum_{i,j} a_{i,j}\, h^1_{i,j}(E_d, \theta_d) \quad (36)$$

$$h^1(E_d, \theta_d) = \cos^i\theta_d\, E_d^{j/2}$$

Ceci pour tenir compte d'essais éventuels où nous ne voudrions pas limiter notre développement à celui de la formule (35) et essayer des combinaisons plus riches.

En général, nous respecterons la forme donnée, au moins dans une première approche, celle-ci étant à même de nous permettre d'atteindre très aisément la contrainte de positivité.

Quoiqu'il arrive i sera limité à un nombre relativement petit $\leqslant 6$.

L'analyse étant réduite à ces quelques éléments, la fonction sera recherchée sous la forme d'une approximation donnée par un lissage.

Nous dépeindrons par la suite les éléments nous permettant de déterminer les conditions de ce lissage.

IV.A.2. Calcul pratique de la base image.

Connaissant la base de f^1, on en déduit la base de S_{f^1} :

$$S_{f^1}(E_\tau, E, \theta_n) = \sum_{i,j} a_{i,j} S_{h^1_{i,j}}(E_\tau, E, \theta_n)$$

nous poserons pour la commodité du calcul, d'après la relation (12) :

$$\left.\begin{aligned} n_d n_\tau U_{f^1}(E_\tau, E, \theta_n) &= S_{f^1}(E_\tau, E, \theta_n) \\ n_d n_\tau U_{i,j}(E_\tau, E, \theta_n) &= S_{h^1_{i,j}}(E_\tau, E, \theta_n) \end{aligned}\right\} (37)$$

IV.A.3. Mise en oeuvre du développement proposé - Lissage.

Dans le début de cette présentation, nous avons longuement insisté sur le fait que nous avions à résoudre en f^1 une équation intégrale (formule (10)) :

$$S^0_M(E, \theta_n) - S_{f^1}(E_\tau, E, \theta_n) = 0$$

où j^1 est une fonction non normalisée.

Cette équation est déduite de l'équation (9)

$$\Phi_M(\theta_n) - \Phi_{f1}(E_\pi, \theta_n) = 0$$

de la manière suivante :

On sait que S_{f1} et Φ_{f1} vérifient la relation (14)

$$\Phi_{f1}(E_\pi, \theta_n) = \int_{E^2}^{E^1} S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n)$$

et on sait d'autre part que $S^0_M(E, \theta_n)$ et $\Phi_M(\theta_n)$ sont liés par une relation de la forme

$$\Phi_M(\theta_n) = \lambda_0^{-1} \int_{E^2}^{E^1} S^0_M(E, \theta_n)\, dE \qquad (38)$$

λ_0^{-1} est un facteur d'échelle qui correspond au fait que si Φ_M est exprimé en nombre de particules, S^0_M est exprimé en volt. La fonction $\lambda_0^{-1} S^0_M$ serait le véritable spectre. λ_0 n'est pas donné expérimentalement, comme nous l'avons fait déjà remarquer, mais peut être atteint par le calcul. C'est le principe de ce calcul que nous développons ici.

D'après les 3 équations précédentes, λ_0 étant indépendant de E et de θ_n, puisqu'il ne dépend que de la chaîne de mesure, on peut donc écrire pour les spectres une équation qui entraîne l'égalité des flux :

$$\lambda_0^{-1} S^0_M(E, \theta_n) - S_{f1} = 0$$

ou encore

$$S_M^{\circ}(E, \theta_n) - \lambda_0 S_{f^1} = 0$$

qu'on peut encore écrire

$$S_M^{\circ}(E, \theta_n) - S_{j^1}(E_T, E, \theta_n) = 0$$

ce qui entraîne,

$$\begin{aligned} j^{\circ 1} &= \lambda_0 f^1 \\ N(j^{\circ 1}) &= \lambda_0 \end{aligned} \qquad (39)$$

et

$$f^1 = N^{-1}(j^{\circ 1}) \times j^{\circ 1}$$

nous avons bien retrouvé l'équation (11) précédemment proposée et la fonction $\frac{j^{\circ 1}}{j^1}$. Le calcul complet de λ_0 dépend maintenant de la détermination de j^1 et du calcul de $n_d n_T$

$$S_M^{\circ} - \lambda_0 S_{f^1} = 0$$

On ne sait pas résoudre cette équation en général et il s'agit donc de trouver des solutions approchées. C'est ce que réalise le lissage. En effet, compte tenu des erreurs de mesure et du pouvoir de résolution en énergie de la base de temps de vol, la fonction S_M° est donnée par points en énergie et angle puisqu'il y a, suivant les cas, deux ou trois directions d'observation.

Nous montrerons par la suite que la forme du développement choisi au paragraphe précédent pour f^1 est relativement bien adaptée à la résolution du problème ainsi posé.

IV.B. Etude de l'équation $S_M - \lambda S_{f^1}$, convergence du développement de la solution f^1.

IV.B.1. Présentation du problème.

Nous avons présenté, dans le paragraphe précédent, les deux formes équivalentes de l'équation que nous nous proposons de résoudre

$$\lambda_0^{-1} S_M^0(E, \theta_n) - S_{f1}(E_T, E, \theta_n) = 0 \qquad (40)$$

$$S_M^0(E, \theta_n) - S_{f1}(E_T, E, \theta_n) = 0$$

avec d'après (39)

$$N(f^1) = \lambda_0$$

Nous rappelons que c'est sous la deuxième forme que le calcul est mené. La résolution en f^1 ne nécessite pas la connaissance de λ_0, du fait de la normalisation.

$S_M(E, \theta_n)$ étant le signal effectivement mesuré, par la méthode du temps de vol à la distance $L(\theta_n)$ et $S_M^0(E, \theta_n)$ étant le spectre ramené à "l'origine", nous pouvons maintenant écrire la première égalité sous la forme

$$\lambda_0^{-1} S_M^0(E, \theta_n) = \lambda^{-1}(E, \theta_n) S_M(E, \theta_n) = S_{f1}(E_T, E, \theta_n) \qquad (41)$$

λ est une fonction dépendant de E et de θ_n que nous allons expliciter.

Compte tenu de l'égalité (38) précédemment développée :

$$\Phi_M(\theta_n) = \lambda_o^{-1} \int_{E^2}^{E^1} S_M^o(E, \theta_n)\, dE$$

On peut maintenant écrire

$$\Phi_M(\theta_n) = \int_{E^2}^{E^1} \lambda^{-1}(E, \theta_n) S_M(E, \theta_n) dE$$

De ces diverses considérations, il ressort que λ / λ_o est un coefficient, sans dimension que nous écrirons désormais

$$\frac{\lambda(E, \theta_n)}{\lambda_o} = K(E, \theta_n) \qquad (42)$$

$K(E, \theta_n)$ est le facteur de transfert précédemment annoncé, qui est une fonction connue. C'est une fonction sans dimension que nous rapporterons à la direction $\frac{\pi}{4}$ et à l'énergie $E_{\mu_{min}}$, que nous allons définir.

On aura d'après (41) et (42) :

$$\lambda_o = \lambda\left(E_{\mu_{min}}, \frac{\pi}{4}\right) \qquad (43)$$

$\frac{\pi}{4}$ sera la direction dans laquelle est installée la chaîne choisie comme chaîne de référence de coefficient d'amplification égal à 1 pour

$$E = E_{\mu_{min}} \qquad \theta_n = \frac{\pi}{4}$$

μ est le coefficient d'atténuation dans l'air, μ_{min} sa valeur minimum dans l'intervalle de E choisi pour le dépouillement.

Finalement nos deux équations (10) et (41) pourront s'écrire

$$\lambda_o^{-1} K^{-1}(E,\theta_n)\, S_M(E,\theta_n) = S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n)$$

$$K^{-1}(E,\theta_n)\, S_M(E,\theta_n) = S_{j1}(E_\pi, E, \theta_n)$$

La dernière forme est la forme utile.

Cependant dans la suite de notre texte nous rencontrerons fréquemment les deux formes équivalentes :

$$S_M^o(E,\theta_n) = \lambda_o S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n)$$

$$S_M(E,\theta_n) = \lambda(E,\theta_n) S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n)$$

La résolution doit tenir compte des deux propriétés de f^1 , pour retenir la ou les solutions trouvées :

- la fonction f^1

$$f(\vec{v_d})\, d^3\vec{v_d} = f^1(E_d,\theta_d) \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta_d\, dE_d\, d\theta_d\, d\varphi_d$$

est une fonction positive à support borné ($E_d \in \left[E_d^2, E_d^1\right]$; $\theta_d \in \left[0, \pi\right]$; E_d^2 et E_d^1 quantités finies)

- f^1 est normalisé à 1 , ce qui en raison de la symétrie azimutale donne

$$2\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} \int_0^{\pi} f^1(E_d,\theta_d) \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta_d\, dE_d\, d\theta_d = 1$$

IV.B.2. Etude de $\lambda(E, \theta_n)$

Dans une première série d'expériences, les mesures avaient été réalisées de la manière suivante : il y avait deux directives d'observation 0 et $\frac{\pi}{2}$, les bases de temps de vol étaient égales et d'une longueur de 120 m, il n'y avait pas eu d'étalonnage des 2 chaînes détectrices de neutrons (scintillateur - PM). Le coefficient λ se réduit au facteur d'échelle λ_0 car nous avons $K(E, \theta_n) = 1$.

$$S_M(E, \theta_n) - \lambda_0 n_d n_\tau \, U_{f^1}(E_\tau, E, \theta_n) = 0$$

$$S_M(E, \theta_n) - \lambda_0 n_d n_\tau \sum_{i,j} a_{i,j} U_{i,j}(E_\tau, E, \theta_n) = 0$$

On recherche la solution, sous la forme

$$\alpha_{i,j} = \lambda_0 n_d n_\tau a_{i,j} \qquad (44)$$

Il est bien évident qu'à ce moment,

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} h^1_{i,j} = \lambda_0 n_d n_\tau f^1(E_d, \theta_d)$$

Pour calculer $\lambda_0 n_d n_\tau$ à partir des $\alpha_{i,j}$, nous remarquons que si nous posons

$$N(a_{i,j}) = 2\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} \int_0^{\pi} f^1(E_d, \theta_d) \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta_d \, dE_d \, d\theta_d$$

$$= \sum_{i,j} a_{i,j} 2\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} E_d^{j/2} \int_0^{\pi} d\theta_d \sin\theta_d \cos^i\theta_d$$

$$N(a_{i,j}) = \frac{8\sqrt{2}\pi}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\substack{2p \geq 0 \\ j \neq -3}} \frac{a_{2p,j}}{(2p+1)(3+j)} \left(E_d^{1\,\frac{3+j}{2}} - E_d^{2\,\frac{3+j}{2}} \right) \qquad (45)$$

dans le cas des $a_{i,j}$, on obtient évidemment :

$$N(a_{i,j}) = 1$$

Si on considère $N(\alpha_{i,j})$, d'après la formule (45) :

$$N(\alpha_{i,j}) = \lambda_0 n_d n_\pi \qquad (46)$$

et on pourra écrire

$$f^1(E_d, \theta_d) = N^{-1}(\alpha_{i,j}) \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \cos^i \theta_d \, E_d^{\frac{j}{2}}$$

enfin

$$S_{f^1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi N^{-1} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n)$$

Dans une seconde série d'expériences, il y avait trois directions d'observation $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ avec à 0 et à $\frac{\pi}{4}$, une base de temps de vol de 258,2 m et à $\frac{\pi}{2}$, 210,2 m. Les 3 chaînes de détection avaient été étalonnées et vu les distances, on a dû tenir compte des coefficients d'atténuation du flux neutronique dans l'air. Le coefficient λ devient alors une fonction de E et de θ_n .

Puisque l'on appelle $\lambda_0^{-1} S_M^0(E, \theta_n)$ l'émission neutronique au niveau de la source dans la direction θ_n, $S_M(E, \theta_n)$ le signal recueilli à la distance $L(\theta_n)$ à travers la chaîne de mesure dans la même direction, on peut écrire :

$$S_M(E, \theta_n) = \lambda_0^{-1} S_M^0(E, \theta_n) \frac{1}{4\pi \{L(\theta_n)\}^2} \times a(\theta_n) \times \mathcal{R}(E, \theta_n) \times e^{-\alpha(E) L(\theta_n)} = \frac{\lambda(E, \theta_n)}{\lambda_0} S_M^0$$

où $a(\theta_n)$ est le facteur de conversion volt/photon de la chaîne de mesure, qui est le rapport du coefficient d'amplification $g(\theta_n)$ du PM par la sensibilité de l'oscilloscope $s(\theta_n)$

$$a(\theta_n) = \frac{g(\theta_n)}{s(\theta_n)}$$

$\mathcal{R}(E, \theta_n)$ étant la réponse en nombre moyen de photons produits dans le scintillateur par une fluence de 1 neutron/cm2. On supposera que $\mathcal{R}$ ne dépend pas de θ_n (voir annexe J) ;

$\alpha(E)$ coefficient d'atténuation à l'énergie E (voir annexe J).

On peut écrire :

$$S_M(E, \theta_n) = \frac{S_M^0(E, \theta_n) \times a(\theta_n)}{4\pi \{L(\theta_n)\}^2 \times \lambda_0} \times \mathcal{R}(E, \theta_n) \times e^{-\alpha(E) L(\theta_n)}$$

et on pourra écrire :

$$K(E, \theta_n) = \frac{\lambda_0^{-1}}{4\pi \{L(\theta_n)\}^2} a(\theta_n) \mathcal{R}(E, \theta_n) e^{-\alpha(E) L(\theta_n)} \qquad (47)$$

avec λ_0 coefficient aux dimensions définies par la formule (43)

$$\alpha = \mu \rho$$

$$\mu = \frac{10^{-24} (0{,}8 \sigma_N + 0{,}2 \sigma_O) \times 6{,}023 \times 10^{23}}{A}$$

A masse de la mole-gramme,

σ_N section efficace totale de l'azote,

σ_O section efficace totale de l'oxygène (dans une certaine gamme d'énergie)

ρ masse spécifique de l'air pour une pression et une température données.

On résoudra alors l'équation (41) soit sous la forme

$$\lambda^{-1}(E,\theta_n)S_M(E,\theta_n) - n_d n_\pi \sum_{i,j} a_{i,j} U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n) = 0$$

$$\lambda^{-1}(E,\theta_n)S_M(E,\theta_n) - \lambda_0^{-1}\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n) = 0$$

soit sous la forme définitive :

$$\begin{aligned} K^{-1}(E,\theta_n)S_M(E,\theta_n) - \lambda_0 n_d n_\pi \sum_{i,j} a_{i,j} U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n) &= 0 \\ K^{-1}(E,\theta_n)S_M(E,\theta_n) - \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (48)$$

ou encore

$$S_M^0(E,\theta_n) - n_d n_\pi U_{j1}(E_\pi, E, \theta_n) = 0$$

On aura alors la fonction f^1 cherchée et le spectre théorique correspondant sous la forme :

$$\begin{aligned} f^1 &= N^{-1} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \cos^i\theta_d E_d^{\frac{j}{2}} \\ S_{f1} &= n_d n_\pi N^{-1} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j} \end{aligned} \qquad (49)$$

On rappelle que :

- λ_0 est un simple facteur d'échelle constant en E et θ_n correspondant au fait que les échelles choisies pour la mesure sont arbitraires (S_M en volts, S_{f1} nombre de neutrons) ;
- $\lambda^{-1}S_M$ joue le rôle d'un spectre à l'origine.

Des considérations antérieures nous tirons :

$$S_M^0(E,\theta_n) - \lambda_0 n_d n_\pi U_{f^1} = 0$$

où U_{f^1} est déterminé par les $a_{i,j}$ tels que

$$a_{i,j} = \lambda_0 n_d n_\pi a_{i,j}$$

$$N(a_{i,j}) = 1$$

$$S_M^0(E,\theta_n) - n_d n_\pi U_{j^1} = 0$$

la résolution nous menant à un $\beta_{i,j}$ tel que

$$\beta_{i,j} = n_d n_\pi b_{i,j}$$

si on appelle $\beta_{i,j}$ les termes du développement de j^1 (fonction non normalisée)

$$N(b_{i,j}) = \lambda_0$$

nous retrouvons le résultat précédemment exprimé.

IV.B.3. Passage au flux.

Des équations (38) et (41) on déduit l'égalité :

$$\int_{E^2}^{E^1} dE\, \lambda^{-1}(E,\theta_n) S_M(E,\theta_n) - \int_{E^2}^{E^1} dE\, S_{f^1}(E_\pi, E, \theta_n) = 0$$

et le flux Φ_M tel que :

$$\Phi_M(\theta_n) = \int_{E^2}^{E^1} dE\, \lambda^{-1}(E,\theta_n) S_M(E,\theta_n) = \lambda_o^{-1} \int_{E^2}^{E^1} dE\, S_M^0(E,\theta_n)$$

$$\lambda_o \Phi_M(\theta_n) = \int_{E^2}^{E^1} dE\, K^{-1}(E,\theta_n)\, S_M(E,\theta_n)$$

Finalement pour calculer le flux, on utilise l'équation (13) :

$$\Phi_M(\theta_n) = \Phi_{f1}(E_\pi,\theta_n) = n_d n_\pi N^{-1} \int_{E^2}^{E^1} \Big(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}\Big) dE$$

Si d'une manière ou d'une autre on connaît Φ_M, on pourra en déduire $n_d n_\pi$.

En fait ce qu'on mesure c'est T le nombre total de neutrons émis dans tout le volume pendant le temps Δt, tel que ΔV étant le volume d'interaction, on ait :

$$T = \Delta V \times 2\pi \times \int_0^\pi \Phi_M(\theta_n) \sin\theta_n\, d\theta_n$$

en définitive

$$T = 2\pi \times \Delta V \times n_d n_\pi \times N^{-1} \int_0^\pi d\theta_n \sin\theta_n \int_{E^2}^{E^1} \Big(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}\Big) dE \qquad (50)$$

En définitive nous pouvons tirer $n_d n_\pi$ de la connaissance du flux et de l'équation (46) :

$$\lambda_o = \frac{N(\alpha_{i,j})}{n_d n_\pi}$$

IV.B.4. Méthode de convergence des moindres carrés.

Nous revenons à notre équation sous sa forme

$$S_M - \lambda S_{f^1} = 0$$

La fonction $S_M(E, \theta_n)$ n'est pas obtenue directement. Comme il a été expliqué dans l'introduction la donnée expérimentale est une fonction $\widehat{S}_M(E, \theta_n)$ avec les relations évidentes.

$$\widehat{S}_M(t, \theta_n)\, dt = S_M(E, \theta_n)\, dE$$

$$E = \frac{1}{2} m \frac{L^2}{t^2}$$

$L_1(\theta_n)$ le cas échéant.

On en déduit les formules de passage du système (E, S) au système $(t, \widehat{S})$ et réciproquement :

$$\left.\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{m}{2E}}\, L_1(\theta_n) \\ \widehat{S}_M(t, \theta_n) &= S_M(E, \theta_n) \frac{(2E)^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} L_1(\theta_n)} \end{aligned}\right\} (51)$$

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \frac{L^2}{t^2} \\ S_M(E, \theta_n) &= \widehat{S}_M(t, \theta_n) \frac{t^3}{m L^2} \end{aligned}\right\} (52)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les mesures étant faites en temps et étant intégrées sur l'ensemble de la source (pas de résolution spatiale) et sur l'ensemble du temps (pas de résolution temporelle), la résolution en énergie ΔE sera celle qui correspond au temps d'émission Δt de la source neutronique que nous avons pris égal à 100 ns (double de la largeur à mi-hauteur de l'impulsion neutronique). Nous montrerons par la suite que cela représente 100 keV, à 120 m et 50 keV à 250 m.

Si l'on connaissait continuement $S_M(E, \theta_n)$ en fonction de E et de θ_n, la résolution de

$$K^{-1}(E, \theta_n) S_M(E, \theta_n) - \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}(E_r, E, \theta) = 0$$

donnerait la solution du problème. Le développement de f^1 pourrait être calculé sous la forme d'un développement éventuellement "infini". D'après ce que nous venons d'exposer, le problème ne se présente absolument pas de cette manière.

Nous travaillons sur un nombre limité d'angles (2 ou 3) et sur des valeurs discrètes en énergie échelonnées de ΔE en ΔE.

IV.B.4.a. Discrétisation.

La phyique nous imposant des valeurs discrètes en θ_n et E, si on pose :

$$k = (i, j) \qquad k \in K$$

$$\varepsilon_r = (E_p, \theta_q) \qquad r \in R$$

E_p, θ_q sont les valeurs discrètes en E et θ_n, notre équation se transforme en un système de R équations à K inconnues

$$S'_M(\varepsilon_r) = \sum_k \alpha_k U_k(E_r, \varepsilon_r)$$

nous savons qu'il existe une solution unique pour $K = R$.

IV.B.4.b. Lissage.

Cette solution introduit des oscillations quand K est grand. On recherche donc un lissage qui passe au mieux par les points expérimentaux et qui donne $f' \geqslant 0$.

C'est pour cela que nous avons choisi de rechercher la convergence au sens des moindres carrés : minimisation de la quantité égale à la somme des carrés des écarts (voir paragraphe suivant).

Cette méthode nous permet en particulier de prendre

$$K < R$$

La résolution fait apparaître un nouveau système linéaire comportant autant d'équations que d'inconnues et donne une solution unique en $\{\alpha_{i,j}\}$ qui définit la famille des S_{f1} approchées à ξ près des points choisis sur les courbes expérimentales.

IV.B.4.c. Rappel de la méthode des moindres carrés.

On a posé :

$$\varepsilon_r = (E_p, \theta_q)$$
$$r = (p, q)$$

et nous prenons

$$\theta_n = \{\theta_q\}$$
$$E = \{E_p\}$$

nous appelons $\xi(E_\tau)$ la quantité à minimiser :

$$\xi(E_\tau) = \sum_{p,q} \left[S_M^0(E_p, \theta_q) - \lambda_0 \sum_{i,j} a_{i,j} n_d n_\tau U_{i,j}(E_\tau, E_i, \theta_n) \right]^2 \qquad (53)$$

On pose enfin

$$k = (i, j)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\xi(E_\tau) = \sum_{r} \left[S_M^0(\varepsilon_r) - \lambda_0 n_d n_\tau \sum_{k} a_k U_k(E_\tau, \varepsilon_r) \right]^2$$

On rappelle que les a_k vérifient la relation linéaire

$$N(a_{i,j}) = 1$$

Si, enfin, on pose

$$\alpha_k = \lambda_0 n_d n_\tau a_k$$

nous rappelons ici sommairement les étapes essentielles de la résolution.

Les α_k sont les solutions d'un système linéaire provenant de l'annulation des différentes dérivées $\frac{\partial \xi(E_\tau)}{\partial \alpha_\ell}$ où $\ell \in \{k\}$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha_\ell} = \sum_{r} U_\ell(E_\tau, \varepsilon_r) \left[S_M^0(\varepsilon_r) - \sum_{k} \alpha_k U_k(E_\tau, \varepsilon_r) \right]$$

ce que nous écrivons

$$\sum_k \alpha_k \sum_r U_\ell(E_\pi, \varepsilon_r) U_k(E_\pi, \varepsilon_k) = \sum_\ell U_\ell(E_\pi, \varepsilon_r) S_M^0(\varepsilon_r) \quad l \in \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} \tag{54}$$

On a autant d'équations que d'inconnues. Le déterminant du système est symétrique. La résolution du système nous donne les valeurs des α_k , donc les $\alpha_{i,j}$, donc les $a_{i,j}$. La minimisation de ξ par variation de E_π nous donnera en définitive $a_{i,j}$ et E_π .

IV.C. Etude des fonctions de base.

Compte tenu des formules (27), (31) et (33) les fonctions de base $U_{i,j}$ se mettent sous la forme :

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_n \neq 0, \pi \\
&U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n) = \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} E_d^{\frac{j}{2}} \int_{^1\theta_d^E}^{^2\theta_d^E} d\theta_d \sin\theta_d \cos^i\theta_d \, g \, s^*(E_d, \theta_d, E_n, E, \theta_n) \\
&\theta_n = 0 \\
&U_{i,j}(E_\pi, E, 0) = \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} E_d^{\frac{j}{2}} \cos^i\theta_d^E \cdot \frac{\sigma_T}{2} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_0} \, g \\
&\theta_n = \pi \\
&U_{i,j}(E_\pi, E, \pi) = \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} E_d^{\frac{j}{2}} \cos^i\theta_d^E \, g \frac{\sigma_T}{2} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_\pi}
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

On fait alors intervenir les quantités (voir annexe D et annexe B, formule (B5)).

$$U^*_{i,j}(E_d, E_T, E, \theta_n) = E_a^{\frac{j}{2}} \int_{\theta_d^E}^{\pi - \theta_d^E} d\theta_d \sin\theta_d \cos^i\theta_d \, g\, \sigma^*(E_d, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$$

$$U^*_{i,j}(E_d, E_T, E, 0) = E_d^{\frac{j}{2}} \cos^i\theta_d \, g \frac{\sigma_T}{2} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi + B\cos^4\chi}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_0}$$

$$U^*_{i,j}(E_d, E_T, E, \pi) = E_d^{\frac{j}{2}} \cos^i\theta_d \, g \frac{\sigma_T}{2} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi + B\cos^4\chi}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_\pi}$$

Dans le cas $E_T = 0$, on peut établir des relations de récurrence simples entre les diverses fonctions $U^*_{i,j}$. On en déduit des égalités et des inégalités entre les $U_{i,j}$ en particulier pour les directions 0 , $\frac{\pi}{2}$, π . L'annexe D développe plus longuement ces résultats. Ces propriétés sont utiles quand on construit les réseaux de courbe $U_{i,j}(E_T, E, \theta_n)$. On construit en effet les $U_{i,j}(E_T, E, \theta_n)$ en fonction de E , E_T et θ_n étant fixés. j étant également fixé, on obtient le réseau en faisant varier i de 0 à 3. Ces propriétés permettent de déduire facilement les courbes les unes des autres par emboîtement à $E_T = 0$. Pour $E_T \neq 0$, il existe encore certaines relations, mais elles sont moins intéressantes et le réseau a une configuration plus complexe. Tous ces éléments apparaîtront quand nous tracerons ces réseaux de courbe dans la quatrième partie (fig. 10 à 18).

IV.D. Recherche d'un développement par la méthode des moindres carrés.

IV.D.1. Résolution du système (54)

Le système (54) qui a été présenté au paragraphe IV.B.4.c. se résout très aisément par la méthode de GAUSS-SEIDEL, qui utilise le calcul des déterminants. On se fixe une valeur de E_T et on calcule les $\alpha_{i,j}$.

IV.D.2. Optimisation du résultat - variation de E_π

Un des points essentiels de cette étude serait de déterminer s'il existe une vitesse d'entraînement de la cible ou non. Il s'agit alors de minimiser $\xi(E_\pi)$ en fonction de paramètres linéaires, les $\alpha_{i,j}$ et en fonction d'un paramètre non linéaire E_π . La méthode la plus simple est d'abord d'essayer plusieurs valeurs de E_π , une autre méthode plus élaborée est une méthode numérique utilisant une minimisation type FLETCHER-POWELL que nous n'exposerons pas.

IV.E. Etude de la convergence .

IV.E.1. Présentation des résultats, normalisation.

Après calcul des $\alpha_{i,j}$ nous sommes amenés à faire apparaître divers résultats. Nous rappelons que la donnée expérimentale est $\widehat{S}_M(t,\theta_n)$

Nous choisissons une échelle temporelle correspondant à des énergies régulièrement réparties et distantes de ΔE , que nous transformons en temps à l'aide des formules (51).

Dans le cas général, les différentes étapes du calcul que nous sommes amenés à faire apparaître sont :

$$\widehat{S}_M(E,\theta_n) = \widehat{S}_M(t,\theta_n)\frac{m^{\frac{1}{2}}L(\theta_n)}{(2E)^{\frac{3}{2}}} = \widehat{S}_M \times J$$

On calcule ensuite d'après (41), (42), (47) :

$$K^{-1}(E,\theta_n)\,S_M(E,\theta_n) \quad = \quad S_M^0(E,\theta_n)$$

et c'est sur cette quantité qu'on fera la comparaison avec le spectre théorique ainsi qu'il a été indiqué au paragraphe IV.B.4.c. . La formule (53) s'écrit alors :

$$\chi(E_\pi) \;=\; \sum_{E,\theta_n}\left[S_M^0(E,\theta_n) - \sum_{i,j}\alpha_{i,j}\,U_{i,j}(E_\pi,E,\theta_n)\right]^2$$

On est donc amené à faire apparaître les résultats suivants :

$$E \longrightarrow S_M^0(E,\theta_n) \longrightarrow \sum_{i,j}\alpha_{i,j}\,U_{i,j}(E_\pi,E,\theta_n)$$

$$E \longrightarrow S_M(E,\theta_n) \longrightarrow K(E,\theta_n)\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\,U_{i,j}(E_\pi,E,\theta_n)$$

En passant aux temps, on obtient :

$$E \longrightarrow \widetilde{S}_M^0(t,\theta_n) \longrightarrow \sum_{i,j}\alpha_{i,j}\,\widehat{U}_{i,j}(E_\pi,t,\theta_n)$$

$$E \longrightarrow \widehat{S}_M(t,\theta_n) \longrightarrow K(E,\theta_n)\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\,\widetilde{U}_{i,j}(E_\pi,t,\theta_n)$$

IV.E.2. Paramètres d'étude de la convergence ξ, ξ/Σ

En plus des diverses courbes présentées, nous donnons la valeur prise par ξ . Cependant cette quantité n'est pas en elle-même un paramètre susceptible de mesurer le degré d'approximation que nous obtenons, aussi considère-t-on le rapport.

$$\varepsilon = \frac{\xi(E_\pi)}{\sum_{E,\theta_n} \left| S^0_M(E,\theta_n) \right|^2} \qquad (56)$$

Nous envisageons également les 3 quantités $\tilde{\xi}$ (voir Annexe I, § 2.e.) $\sum_{E,\theta_n} \tilde{S}^2_M(t,\theta_n)$, $\frac{\tilde{\xi}}{\Sigma}$ transformées en temps des précédentes.

V. ETUDE DES DIFFERENTS PARAMETRES DU CALCUL : E^2_d, E^1_d, E_π, j ET LE NOMBRE DES TERMES DU DEVELOPPEMENT DE f^1 EN COS θ_d .

Le choix d'un développement de f^1 passe donc par le choix des différents paramètres qui déterminent cette fonction. Il s'agit de les choisir le moins arbitrairement possible.

Pour E^1_d et E_π la méthode paraît claire : on a une équation pour E^1_d donnée par E^1 et pour E_π, c'est l'optimisation de ξ qui devrait trancher. Pour E^2_d et les paramètres i et j , il y a une difficulté profonde. La coupure en énergie basse (E^2_d) est en effet très arbitraire, quant au choix de la structure de f^1 , c'est évidemment affaire de tâtonnement. Dans un premier temps nous avons plutôt penché vers le jeu sur les termes d'anisotropie (plusieurs termes en cos θ_d) et vers la restriction du choix de la variation en énergie (choix d'un seul j aussi bien ajusté que possible).

V.A. Effets sur les courbes isotropes de E_d^1, E_d^2, j.

V.A.1. Effet du paramètre j.

Donnons-nous $i = 0$, fixons E_d^2 et E_d^1, par exemple 50 keV et 600 keV respectivement, prenons également $E_T = 0$ et considérons les différentes courbes $U_{0,j}(0,E,0)$ obtenues quand on fait varier j. Les résultats pratiques sont reportés sur la figure n° 18 de la quatrième partie, § I.A.2.

Quand E_d^1 est fixe, le support (E^2, E^1) est fixe, j fait varier la pente des courbes $U_{0,j}(0,E,0)$.

En effet, on verra que l'on peut écrire à l'origine (Annexe C, § 3).

$$\left\{\frac{d}{dE}\left[\frac{(m_d)^2}{4} U_{0,j}(0,E,0)\right]\right\}_{E=E^2,E^1} = \left[-\frac{dE_d}{dE} E_d^{\frac{j}{2}} h(E_d)(1+A+B)\right]_{E=E^2,E^1}$$

$$h(E_d) = \frac{\delta_T}{1+\frac{A}{3}+\frac{B}{5}} \cdot \sqrt{\frac{E_d}{\delta Q + 3E_d}}$$

La dérivée $\frac{dE_d}{dE}$ correspond à la dérivation aux points cités de l'équation implicite $D(E_d,0,E,0) = 0$, la quantité s'écrit :

$$\frac{(m_d)^2}{4}\left[\frac{d}{dE} U_{0,j}(0,E,0)\right]_{E=E^2,E^1} = -(E_d^1)^{\frac{j}{2}} h(E_d^1)\left[1+A(E_d^1)+B(E_d^1)\right]\left[\frac{dE_d}{dE}\right]_{E=E^2,E^1}$$

Les pentes en ces 2 points $\frac{dE_d}{dE}$ sont bien fixées et l'on peut voir qu'elles varient comme $(E_d^1)^{j/2}$; quand j varie en prenant des valeurs négatives cette pente à l'origine décroît avec $|j|$.

Par contre, quand on s'éloigne de l'origine pour se rapprocher des sommets, j accroîtra ces pentes en augmentant en valeur absolue, à cause de $\frac{dE_d}{dE}$; le cas $j = 0$ est à part.

En définitive, j va donc jouer sur la pente des courbes S_{j1} et la largeur à mi-hauteur.

V.A.2. Effet du paramètre E_d^1 .

Le même réseau de courbes nous montre, ce que nous savions déjà, que E_d^1 donne les valeurs extrêmes du support du spectre (E^2, E^1). Pour $i = 0$, $j = 0$, E_d^1 fixe donc d'une part le pied de la courbe isotrope, d'autre part donne la largeur à mi-hauteur (fig. 18).

V.A.3. Effet du paramètre E_d^2 .

Le rôle de E_d^2 est plus délicat à déterminer. Toujours de l'étude de la courbe isotrope menée au § III.a.3. nous pouvons en déduire deux constatations :

Quand, tous les autres paramètres étant fixés, on étudie la variation de l'intégrale en fonction de E_d^2 , on s'aperçoit que pour $j \neq 0$ elle croît au voisinage des sommets, quand E_d^2 décroît (ceci est facilement vérifié analytiquement). Les sommets se rapprochent quand E_d^2 décroît, s'éloignent quand E_d^2 croît (fig. 18).

V.B. Anisotropie.

V.B.1. Effet de i .

Si on s'arrête au choix d'une fonction f^1 , à variables séparées, ne dépendant de E_d que par une puissance choisie au mieux pour approcher les pentes des spectres expérimentaux, on essaie de rendre compte de l'anisotropie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ par un choix judicieux des termes du développement en

cos θ_d . L'étude des différents termes à 0 et à $\frac{\pi}{2}$, nous a montré, pour $E_\pi = 0$, des différences bien caractérisées. On peut ainsi, à partir du spectre isotrope à $\frac{\pi}{2}$, déduire un spectre décalé à un seul sommet à 0, (cf. fig. 10 à 17).

Le choix du nombre des termes sera guidé par la précision souhaitée, sans oscillations.

V.B.2. Effet de E_π

Mathématiquement la mise en vitesse de la cible par rapport à une distribution isotrope de deutérons accélérés est équivalente à l'introduction de termes d'anisotropie dans la distribution des deutérons accélérés, la cible restant immobile. Physiquement ce sont deux phénomènes différents. Les figures n° 12, 13, 16,17 montrent les effets de l'introduction de $E_\pi \neq 0$ sur différentes courbes isotropes.

Les figures n° 10, 12 montrent la déformation des courbes d'une famille correspondant à un angle donné et à différentes valeurs de i , pour plusieurs valeurs de E_π .

V.C. Détermination de E_d^1 . Discussion.

Si nous supposons connus les pieds des courbes expérimentales en temps correspondant à diverses valeurs de θ_n , et particulièrement le point correspondant à l'arrivée des premiers neutrons les plus énergétiques, l'équation :

$$D(E_d, E_\pi, E^1, \theta_n) = 0$$

appliquée à un angle θ_n et à une valeur E_π , nous donne E_d^1 .

La précision n'est malheureusement pas très bonne :

d'une part, parce que le seuil d'un PM est toujours mal défini, d'autre part parce que le coefficient λ varie, généralement assez fortement, pour ces valeurs, ce qui augmente l'imprécision.

V.D. Détermination de E_d^2 par le flux. ($E_T = 0$)

La valeur E_d^2 apparaît dans les calculs à posteriori, également. Si on considère U_{ij} , la valeur de cette intégrale dépend de sa borne inférieure en E_d : E_d^2 . Très grossièrement en un pt E et ϑ_n , U_{ij} , décroît en valeur absolue quand E_d^2 décroît, dans un intervalle limité de l'énergie E autour de 2,45 MeV, correspondant à $E_d^{min} = E_d^2$.

Dans la fonction S_{f1}

$$S'_{f1} = n_d n_n \left(N^{-1} \sum_{i,j} \alpha_{ij} U_{ij} \right)$$

nous avons non seulement le terme en U_{ij} mais aussi le terme en N

$$N \propto \frac{1}{3+j} \left[\left(E_d^1 \right)^{\frac{3+j}{2}} - \left(E_d^2 \right)^{\frac{3+j}{2}} \right]$$

pour $j = -8$ par exemple

$$N \propto \frac{1}{5} \left[\left(E_d^2 \right)^{-\frac{5}{2}} - \left(E_d^1 \right)^{-\frac{5}{2}} \right]$$

Ce terme croît, quand E_d^2 décroît et ceci très rapidement. En définitive S_{f1} décroît avec E_d^2 , en un point (E , θ_n).

L'étude des variations de $U_{i,j}$ à j donné, et à E et θ_n donnés, en fonction de E_d^2 peut, en particulier, être menée à partir de la fonction $U_{0,j}$ laquelle est toujours positive. Dans ce cas le comportement en fonction de E_d^2 de $U_{0,j}$ est déterminé par le comportement de la fonction $\sigma_T (E_d)^{\frac{j+1}{2}}$, le reste de la fonction variant faiblement en fonction de E_d.

Comme dans l'expérience on peut mesurer le nombre total de neutrons, on réalise alors le calcul suivant :

$$R = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta_n \, d\theta_n \, n_d n_\pi \left[N^{-1} \int_{E^2}^{E^1} \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j} \right) dE \right]$$

Si on appelle ΔV le volume d'interaction (par exemple le volume de la bulle) et si on pose

$$T = R \Delta V = \frac{\Delta \mathcal{N}}{\Delta t}$$

$\Delta \mathcal{N}$ nombre de neutrons émis dans tout le volume,
Δt temps de l'émission neutronique.

On aboutit en partant de la formule (50) à la formule simplifiée

$$\Delta \mathcal{N} = \Delta t \times 4\pi \Delta V \times n_d n_\pi \times N^{-1} \times \int_{E^2}^{E^1} \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j} \right) dE$$

dans laquelle on a supposé le flux

$$n_d n_\pi \times N^{-1} \times \int_{E^2}^{E^1} \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j} \right) dE$$

indépendant de ϕ_n.
Il apparaît dans tous ces calculs que la quantité importante est :

$$\Delta V \times N^{-1} \times \int_{E^2}^{E^1} \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j} \right) dE$$

Cette quantité met en évidence que le choix de E_d^2 est lié au choix du volume d'interaction. Par suite de l'utilisation pour $f_{1,2}$ d'une moyenne spatio-temporelle, nous avions fait disparaître l'espace et le temps de notre formule : ΔV et E_d^2 réintroduisent grossièrement ces 2 notions quand nous passons au calcul du flux.

Si par ailleurs, on suppose connu n_T (densité des deutérons dans la bulle), ΔM, Δt , on peut en déduire $n_d \Delta V$. Une évaluation raisonnable de ΔV peut alors nous donner n_d .

3e PARTIE : PROGRAMMATION ET TEST

I. CALCUL PRATIQUE DE ρ^*, ρ, U^*, U pour $\theta_n \neq 0, \pi$

I.A. Construction de ρ^*, ρ.

Nous avons donné au § III.B.3.a. de la deuxième partie, formule (28), l'expression détaillée de $\rho^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$

$$\rho^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) = \frac{\tilde{\sigma}_\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{1}{\gamma W_n \sin\theta_{cm} \sin\theta_n \sin\varphi_d^E}$$

Le calcul de ρ^* passe par ceux des quantités $\gamma, W_n, \sin\theta_{cm}, \sin\theta_n$ qui sont explicités dans l'annexe A. Dans cette même annexe sont également, longuement étudiées les expressions de φ_d^E et χ^E et leurs variations puisque c'est par leur intermédiaire que la fonction ρ^* dépend de E. Pour achever la détermination de ρ^* il faut posséder les données $\tilde{\sigma}_\pi(g), A(E_B), B(E_B)$. Tous ces éléments figurent dans l'annexe E, qui explicite également le choix du système d'unités. L'application ρ^*, une fois calculée, peut être tracée soit en fonction de E si on veut faire apparaître un spectre élémentaire correspondant à un cône d'injection à énergie donnée, soit en fonction de θ_d si on veut l'étudier en tant qu'elle intervient dans le calcul de $S'^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$ (voir annexe B, § 2, B 5)

$$S'^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n) = \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_\pi)\, \rho^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$$

La forme de S'^* fait également apparaître l'expression

$$\rho(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) = g(E_d, \theta_d, E_\pi)\, \rho^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$$

qui peut être plus pratique à manipuler pour l'étude de l'intégrale S^*.

On a longuement étudié dans l'annexe B l'application $E \longrightarrow \mathcal{S}^*$ Nous rappelons qu'il existe un problème de points à l'infini et que nous avons montré que l'intégrale $\mathcal{S}^*$ convergeait, compte tenu de la structure de $\mathcal{S}^*$. Toutes ces remarques ont été prises en compte dans le calcul machine et nous ont permis d'obtenir une bonne approximation des intégrales à calculer : les annexes E et H étudient dans le détail les solutions proposées; on donne en particulier des explications sur les asymptotes et les majorations des restes.

I.B. Calcul de $U^*_{i,j}(E_d, E_r, E, \theta_n)$ et $S^*(E_d, E_r, E, \theta_n)$ pour $\theta_n \neq 0, \pi$.

A ce stade du calcul, la méthode numétique INPAR, basée sur GAUSS-LEGENDRE permet de mener à bien le calcul en ayant une bonne précision au voisinage des asymptotes.

I.C. Calcul de $U_{i,j}(E_r, E, \theta_n)$ et $S_{f1}(E_r, E, \theta_n)$ pour $\theta_n \neq 0, \pi$.

Le calcul de cette intégrale double en E_d et en θ_d, est exécutée directement en utilisant une méthode INPAR à deux étages. La précision est de l'ordre du millième. Le programme qui réalise le calcul complet de S_{f1} ou de $U_{i,j}$ permet aussi de réaliser le calcul de S^* et de $U^*_{i,j}$.

I.D. Calcul de $U_{i,j}$ et S_{f1} pour $\theta_n = 0, \pi$.

Nous avons indiqué au § III.B.3.b. de la deuxième partie la marche du calcul. L'annexe C développe dans le détail les problèmes posés et les solutions proposées.

I.E. Conclusions.

Un programme global réalise l'ensemble des opérations précédentes : calcul des quantités $U_{i,j}$ ou S_{f1}, quelle que soit la valeur de θ_n, calcul des quantités S^* ou $U^*_{i,j}$ sur option. On peut ainsi calculer toute fonction S_{f1} de E et, en particulier, les fonctions $U_{i,j}$, que nous appelons fonctions de base et qui servent dans notre calcul des moindres carrés.

II. ENREGISTREMENT D'UN DICTIONNAIRE DES $U_{i,j}$ SUR BANDE MAGNETIQUE.

II.A. Enregistrement.

Le programme précédemment étudié nous permet de calculer par point les différentes courbes correspondant aux fonctions de base $U_{i,j}$. L'annexe F développe les modalités de la mise en mémoire sur bande magnétique de telles courbes.

II.B. Eléments de discussion.

II.B.1. Principe de la constitution d'un dictionnaire.

Nous avons vu que les paramètres qui déterminent une courbe du dictionnaire sont : $E_d^2(EDO)$, $E_d^1(EDMAX)$, $E_\pi(ET)$, $\theta_n(TETAN)$, $i(I)$, $j(J)$. Ces données constituent l'adresse d'une courbe quelconque.

La méthode de dépouillement étant par nature itérative, le choix des courbes de base figurant dans le dictionnaire se fait par approximations successives.

Nous avons relevé dans un paragraphe précédent le premier ensemble de 48 courbes auquel nous avons fait appel : il faisait usage d'une série de valeurs des paramètres proposées par M. J. BERNSTEIN. Au fur et à mesure des dépouillements, nous avons été ensuite amenés à l'enrichir en jouant sur les paramètres suivants.

IIB.1.a. Variation de E_d^1.

Les pieds des courbes paraissent relativement bien déterminés dans les tirs de MORONVILLIERS : 3 200 keV, avec une bonne coïncidence entre les trois directions. Ceci nous a amené à prendre 350 keV comme valeur de E_d^1

Dans les spectres de LIMEIL, ce point paraissait moins bien déterminé en particulier la coïncidence entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ était nettement moins bonne. Là aussi nous nous sommes ralliés à 3 200 keV et à $E_d^1 = 350$ keV.

Comme nous le verrons par la suite quand nous ferons intervenir les coefficients correctifs sur les valeurs de spectre pour les grandes valeurs de L , les pieds des courbes sont connus avec une précision médiocre. A cet élément d'incertitude , dû aux fortes variations du coefficient d'atténuation dans la région de 3 000 keV, il faut ajouter l'erreur propre due à la chaîne de détection (seuil du PM).

Nous avons donc été amenés à étudier complètement ou partiellement les valeurs suivantes de E_d^1 :

150 , 200 , 250 , 300, 600

II.B.1.b. Variation de E_d^2

Les considérations sur le flux que nous développons plus loin, sur la position des sommets des courbes à o et à $\frac{\pi}{4}$, et sur leurs positions relatives par rapport à 2 450 keV (valeur approximative du point moyen à $\frac{\pi}{2}$, avec 2 bosses ou une), nous ont conduits à essayer les différentes valeurs de E_d^2 : 10, 30, 50, 100.

II.B.1.c. Variation de j.

j , on l'a vu, joue sur la pente et la largeur à mi-hauteur : des différents essais d'ajustement entrepris, il apparaît que les tirs à LIMEIL ont été relativement bien rendus avec $j = -8$ et ceux de MORONVILLIERS avec $j = -6$.

II.B.1.d. Variation de E_π

Là, le problème est très délicat, puisqu'il s'agirait de minimiser la quantité $\xi(E_\pi)$. Nous avons procédé par tâtonnements, toujours à partir de $E_\pi = o$ la valeur la plus facilement mise en oeuvre. Nous avons ensuite choisi de forts écarts $E_\pi = 1{,}67$ ou $E_\pi = 10$.

II.B.1.e. Valeurs de θ_n

Ce sont les angles d'observation mis à notre disposition par les expérimentateurs $\theta_n = 0, \frac{\pi}{2}$ à Limeil, $\theta_n = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ à Moronvilliers.

II.B.2. Etat actuel au dictionnaire.

Il comprend deux grands ensembles de courbes. Celui que nous avons décrit précédemment : $E_d^2 = 50$, $E_d^1 = 600$ avec 2 angles 0 et $\frac{\pi}{2}$ et un troisième que nous avons adjoint postérieurement (uniquement pour $E_\tau = 0$) : $\frac{\pi}{4}$.

Le deuxième ensemble correspond à $E_d^2 = 30$, $E_d^1 = 350$.

Pour $E_\tau = 0$, nous disposons de deux valeurs de $j = -6, -8$ avec les 3 angles 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$. De même dans ce cas, pour $j = -8$ et pour les 3 angles, nous disposons des valeurs de i : 4, 5, 6. Enfin pour $E_\tau = 1{,}67$ keV, et $j = -6$, nous pouvons également explorer les 3 directions 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons également exploré diverses autres configurations pour (E_d^2 , E_d^1), dont (10, 150), (10, 250), (30,200), (100, 350), ceci pour essayer de mesurer les effets de E_d^2.

III. PROGRAMME D'EXPLOITATION DE LA BANDE.

III.A. Sommation des $U_{i,j}$

Pour minimiser la quantité $\xi(E_\tau)$, qui est la somme des carrés des écarts, on forme les sommes

$$\lambda_0 n_d n_\tau \sum_{i,j} a_{i,j} U_{i,j}(E_\tau, E, \theta_n)$$

On veut donc, au sortir de la bande magnétique, réaliser des sommations des fonctions de base nécessaires à la poursuite des calculs des moindres carrés et des spectres théoriques correspondants.

III.B. Normalisation.

Nous rappelons que la fonction f^1 est normalisée à 1 et que les $\alpha_{i,j}$ sortant du calcul des moindres carrés doivent être divisés par la norme $N(\alpha_{i,j}) = \lambda_0 n_d n_\tau$ pour donner les $a_{i,j}$. Tous ces calculs sont développés dans les annexes G et I.

Etat des inscriptions sur la bande magnétique.

- EDO = 50 EDMAX = 600

j \ i	0	1	2	3
-12	×	×	×	×
-8	×	×	×	×
-6	×	×	×	×
0	×	×	×	×

θ_n \ E_T	0	1,67	10
0	×	×	×
$\frac{\pi}{2}$	×	×	×

- EDO = 50 EDMAX = 300 ET = 0 θ_n = 0 i = 0 j = 0
- EDO = 10 EDMAX = 600 ET = 0 θ_n = 0 i = 0 j = 0
- EDO = 10 EDMAX = 600 ET = 0 θ_n = 0 i = 0 j = -6
- EDO = 30 EDMAX = 350

j \ i	0	1	2	3
-6	×	×	×	×
-8	×	×	×	×

θ_n \ E_T	0	1,67
0	×	×
$\frac{\pi}{2}$	×	×

- EDO = 10 EDMAX = 250

j \ i	0	1	2	3
-8	×	×	×	×

θ_n \ E_T	0	0,1
0	×	×
$\frac{\pi}{2}$	×	×

— EDO = 30 EDMAX = 200

j \ i	0	1	2	3
-8	×	×	×	×

θ_n \ E_T	0	0,1
0	×	×
$\frac{\pi}{2}$	×	×

— EDO = 10 EDMAX = 150

j \ i	0	1	2	3
-8	×	×	×	×

θ_n \ E_T	0	0,1
0	×	×
$\frac{\pi}{2}$	×	×

— EDO = 30 EDMAX = 350

j \ i	4	5	6
-8	×	×	×

θ_n \ E_T	0
0	×
$\frac{\pi}{2}$	×

— EDO = 30 EDMAX = 350

j \ i	0	1	2	3	4	5	6
-8	×	×	×	×	×	×	×

θ_n \ E_T	0
$\frac{\pi}{4}$	×

— EDO = 30 EDMAX = 350

j \ i	0	1	2	3
-6	×	×	×	×

θ_n \ E_T	0
$\frac{\pi}{4}$	×

- EDO = 50 EDMAX = 600

j \ i	0	1	2	3
-6	x	x	x	x

θ_n \ E_T	0
$\frac{\pi}{4}$	x

- EDO = 30 EDMAX = 350

j \ i	0	1	2	3
-6	x	x	x	x

θ_n \ E_T	1,67
$\frac{\pi}{4}$	x

- EDO = 100 EDMAX = 350

j \ i	0	1	2	3
-6	x	x	x	x

θ_n \ E_T	0
0	x
$\frac{\pi}{4}$	x
$\frac{\pi}{2}$	x

- EDO = 10 EDMAX = 150

j \ i	0	1	2	3
-8	x	x	x	x

θ_n \ E_T	0
$\frac{\pi}{4}$	x

- EDO = 30 EDMAX = 200

j \ i	0	1	2	3
-8	x	x	x	x

θ_n \ E_T	0
$\frac{\pi}{4}$	x

III.C. Sortie STROMBERG-CARLSON.

On est amené à sortir les courbes S_{f1} en fonction de E et $\widehat{S}_{f1}$ en fonction de t. Cet ensemble de résultats et de calculs forme le programme d'utilisation de la bande.

IV. TESTS DE CONTROLE DE LA PRECISION DU CALCUL.

Un certain nombre de résultats de l'étude analytique permettent de proposer des vérifications très précises des résultats obtenus : ce sont, la convergence des intégrales $S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$, l'isotropie du spectre dans le cas $E_\pi = 0$, pour $\theta_n = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, l'annulation des termes $U_{2n+1,j}(0, E, \frac{\pi}{2})$, la continuité en θ_n, les propriétés des courbes $E_1(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$ et $E_2(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$ en fonction de θ_d. L'annexe H développe plus longuement les différents calculs y afférents.

V. COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES.

V.A. Programme de minimisation de ξ, calcul des $\alpha_{i,j}$, calcul des flux.

Un programme réalise les différents calculs à la minimisation de $\xi(E_\pi)$ (voir annexe I et § IV.B.4. de la deuxième partie). A partir des points obtenus après dépouillements des spectres expérimentaux, il transforme en particulier ces spectres en tenant compte de l'atténuation dans l'air et il détermine les spectres expérimentaux les plus proches à ξ près. On en déduit les $\alpha_{i,j}$ correspondants.

V.B. Résultats pratiques.

En plus des $\alpha_{i,j}$ et de ξ, ce programme nous donne les courbes S_{f1} en fonction de E ainsi déterminées et les courbes $\widehat{S}_{f1}$ en fonction de t. Ces résultats sont ensuite sortis sous forme de courbes sur STROMBERG-CARLSON : des astérisques représentent les points expérimentaux S_M, des points renforcés les points théoriques S_{f1}, les échelles des abscisses sont les échelles des temps correspondant aux deux distances 258,2 et 210,2, les angles retenus sont $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, on trace également les courbes obtenues en tenant compte de l'atténuation dans l'air.

4e PARTIE : DEPOUILLEMENTS

I. DEPOUILLEMENTS PRELIMINAIRES.

I.A. Construction de courbes élémentaires pour observer les caractéristiques des spectres de base.

I.A.1. Courbes $S^{1*}(E_a, E_T, E, \theta_n)$

Les courbes $U_{1,0}(0, E, 0)$ s'annulent en un point situé aux alentours de 2 540 keV. Pour étudier ce point, nous conduisons les courbes $U^*_{1,0}(E_a, 0, E_i, 0)$ en E_a , pour différentes valeurs de E (2 540, 2 545, 2 550) (fig. 9). Le changement de signe apparaît entre 2 545 et 2 550. Les courbes $U^*_{1,0}$ sont des courbes régulières sur lesquelles on peut facilement observer l'évolution des surfaces déterminant le signe de l'intégrale. Ceci est normal puisque dans le cas $\theta_n = 0$, $U^*_{i,j}$ est une quantité donnée par une forme analytique.

I.A.2. Tracé du réseau des courbes $U_{i,0}$ pour $\theta_n = 0, \frac{\pi}{2}$ et $E_T = 0$; 10 keV

Une fois terminée l'étude des différentes intégrales et mis en place les différents programmes permettant de les calculer, nous devons étudier l'ensemble des spectres de base.

Nous avons précédemment vérifié l'isotropie, c'est-à-dire l'égalité des différentes courbes $U_{0,j}(0, E, \theta_n)$ entre elles, pour $\theta_n = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ et $E_T = 0$.

De même nous avons vérifié à 10^{-5} près l'égalité à zéro des courbes $U_{2p+1,j}(0, E, \frac{\pi}{2})$ $(p \geq 0)$, à $E_T = 0$.

De même, toujours à $E_T = 0$, nous avons vérifié les différentes relations liant les courbes $U_{i,j}(0, E, 0)$ et $U_{i,j}(0, E, \pi)$.

Dans un premier temps, nous en venons à étudier pour $E_T = 0$ et pour les 2 angles $\theta_n = 0$ et $\theta_n = \frac{\pi}{2}$, le réseau des courbes correspondant à différentes valeurs de i . Nous avons choisi $j = 0$ et 0, 1, 2, 3 pour i (fig. 10, 11). Ceci nous donne donc pour f^1 , d'après la formule (35):

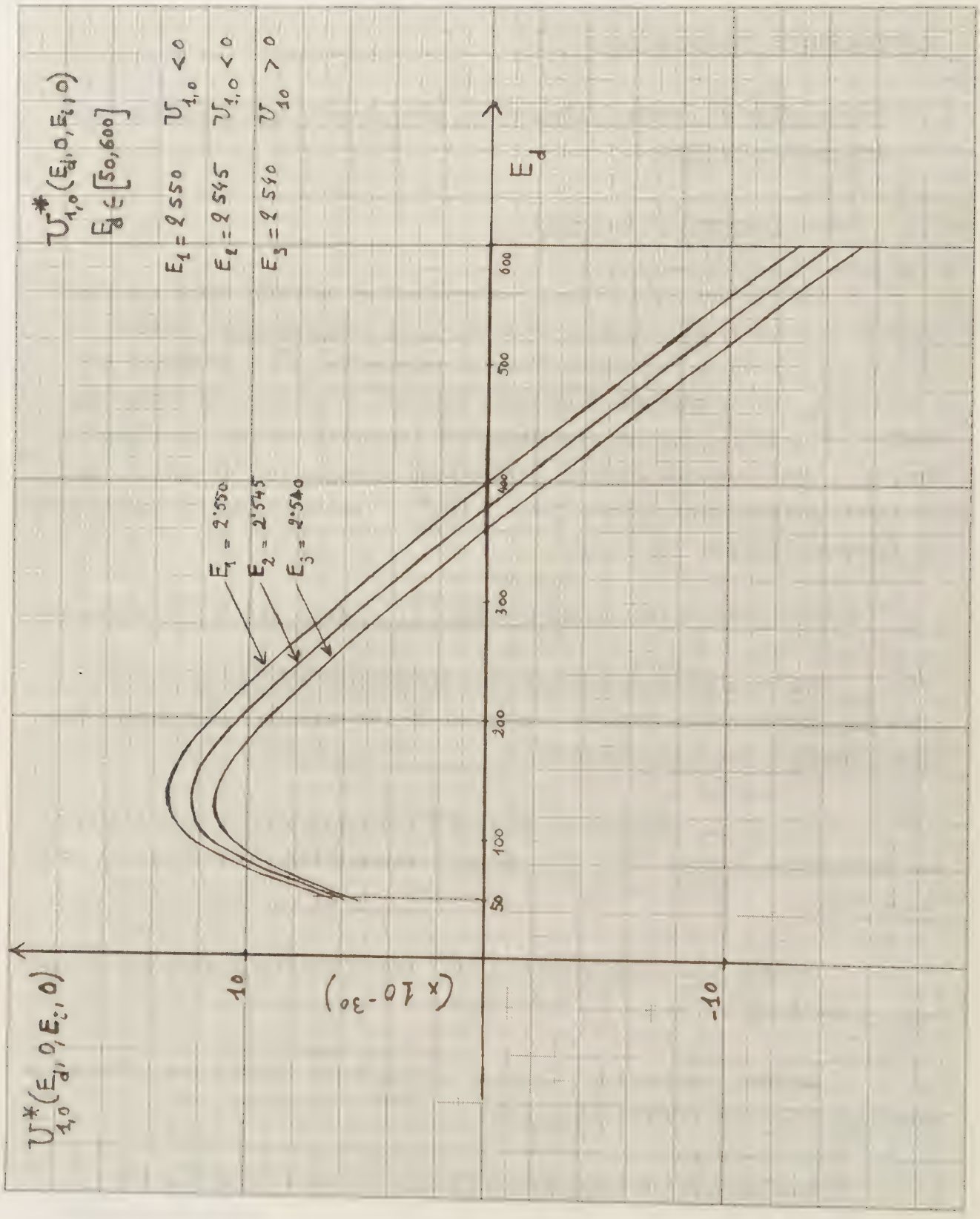


Fig 9: $U^*_{1,0}(E_d, 0, E_i, 0)$ en fonction de E_d pour différentes valeurs de E_i

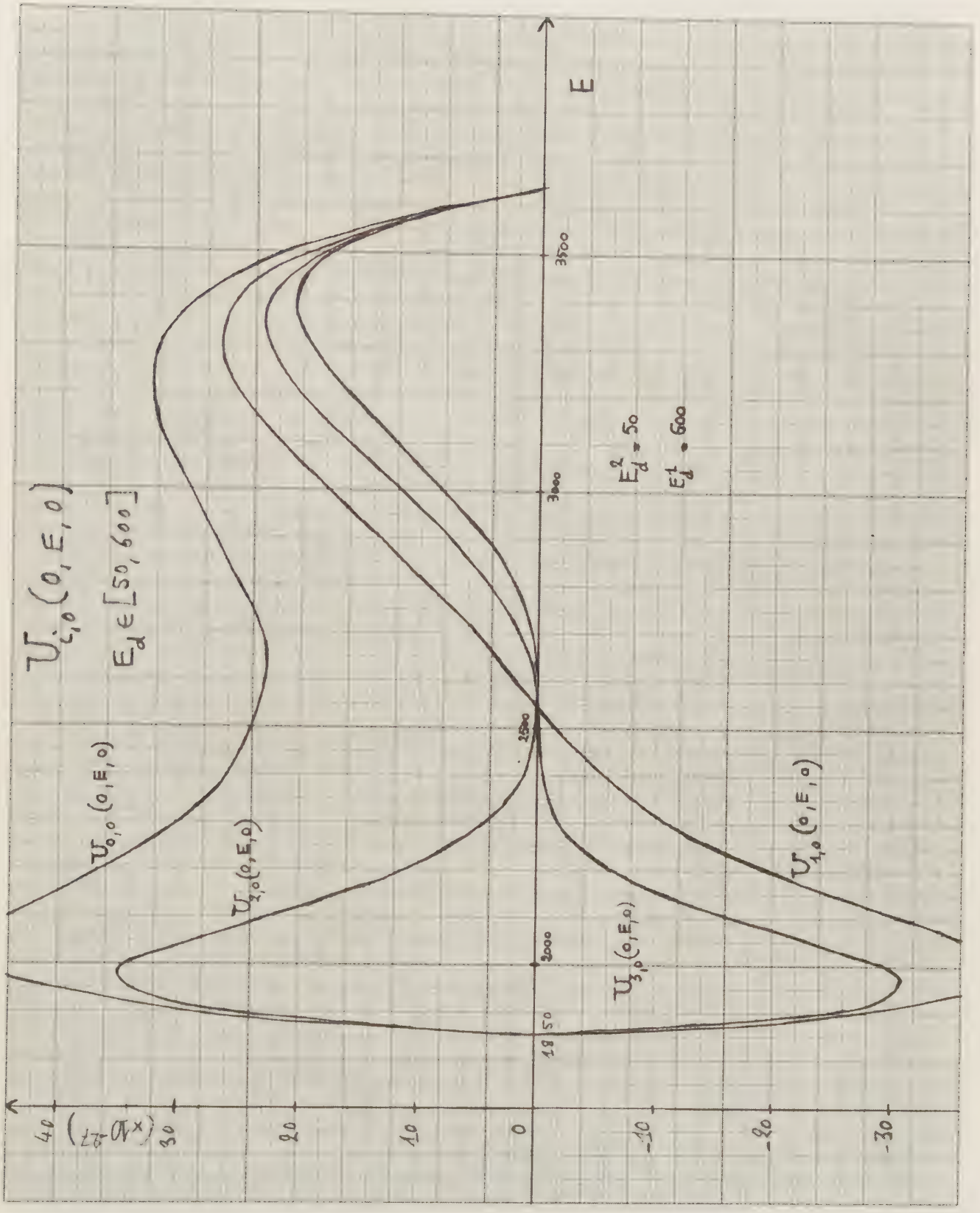


Fig 10 : $U_{i,0}(0,E,0)$ en fonction de E pour $E_d^2 = 50$ $E_d^1 = 600$ $(i = 0, 1, 2, 3)$

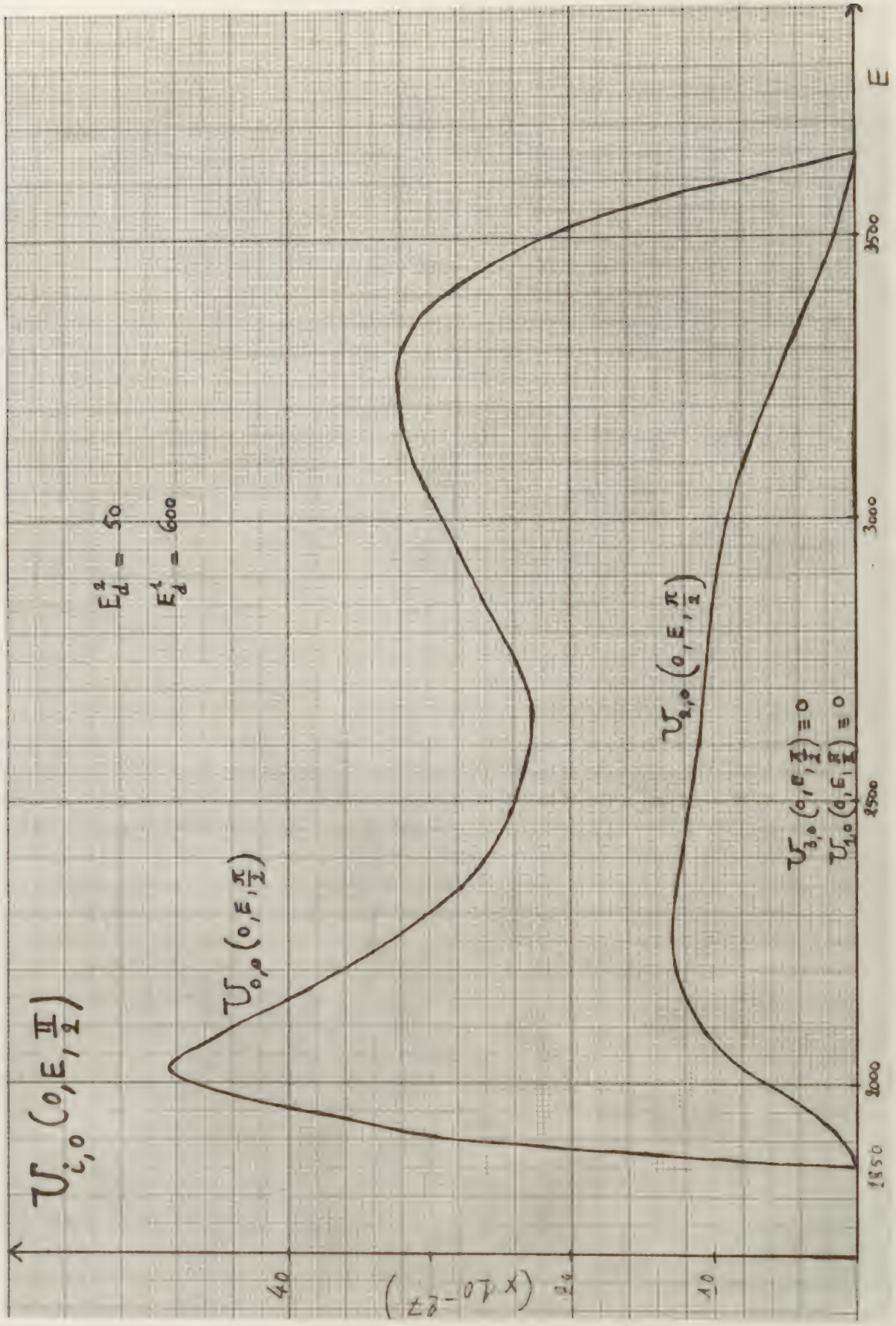


Fig 11 : $U_{i,0}(0, E, \frac{\pi}{2})$ en fonction de E pour $E_d^2 = 50$ $E_d^1 = 600$ $(i = 0, 1, 2, 3)$

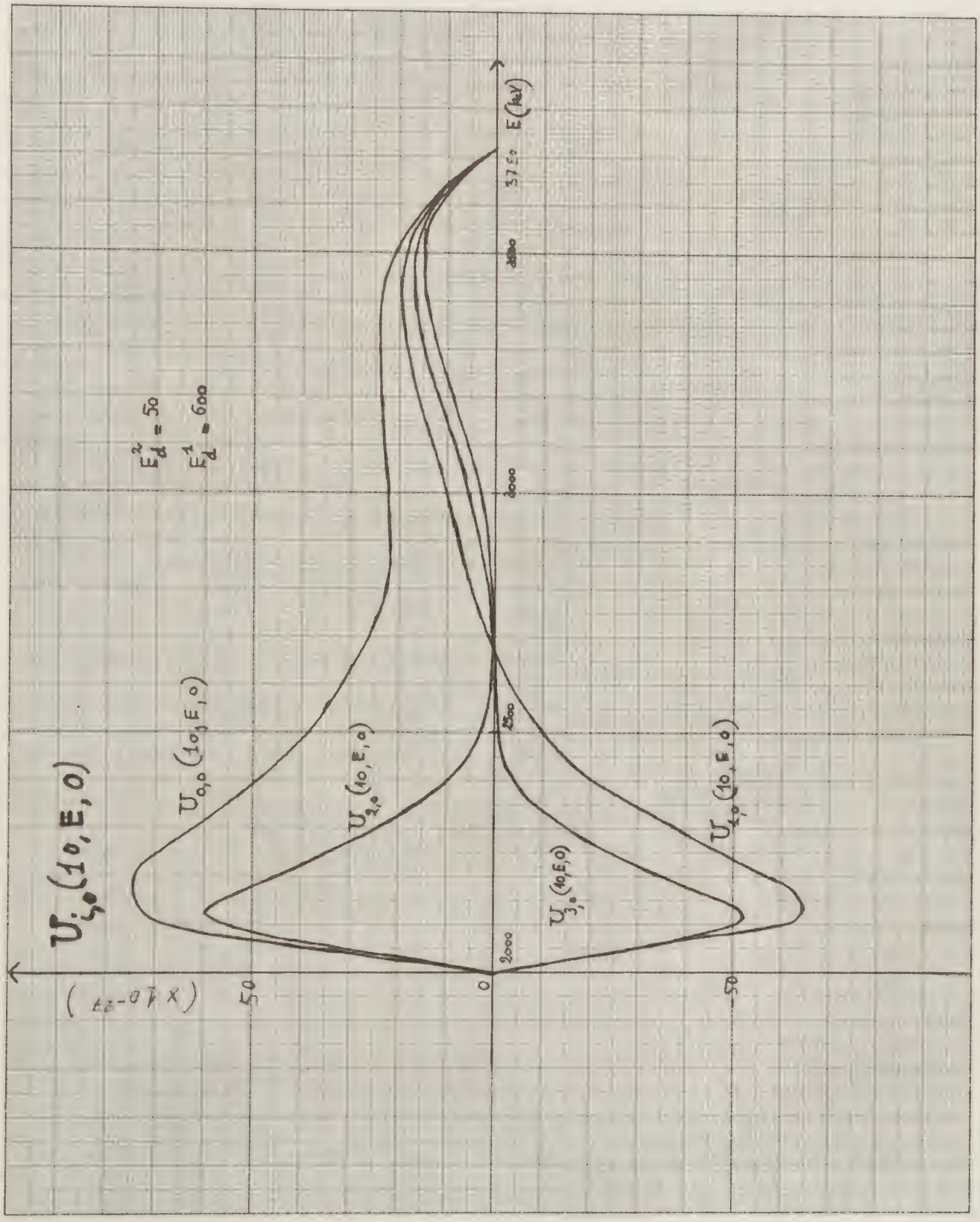


Fig. 12 : $U_{i,0}(10,E,0)$ en fonction de E pour $E_d^2 = 50$ $E_d^1 = 600$ $(i = 0,1,2,3)$

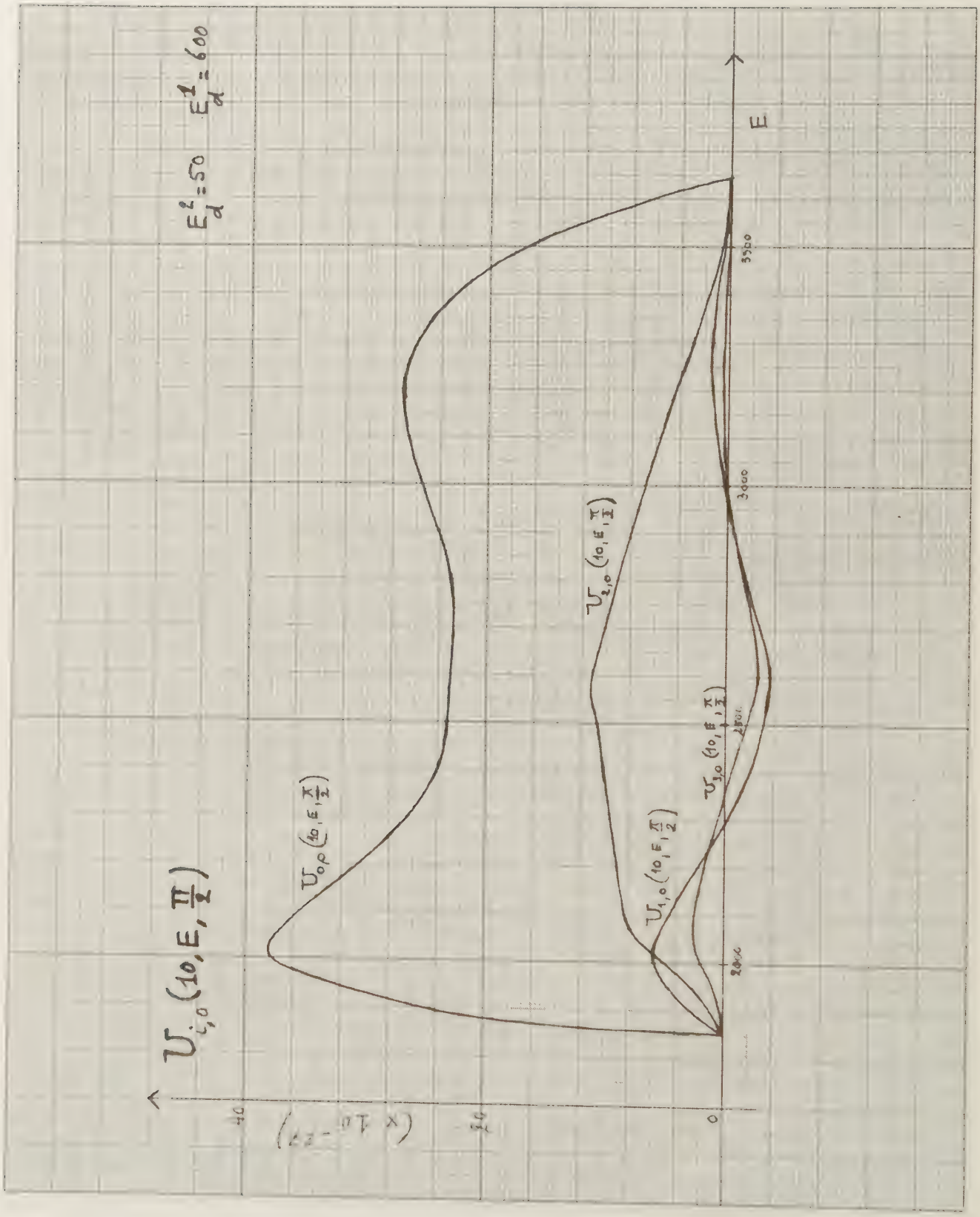


Fig 13 : $U_{i,0}\left(10, E, \frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de E pour $E_d^2 = 50$, $E_d^1 = 600 (i = 0, 1, 2, 3)$

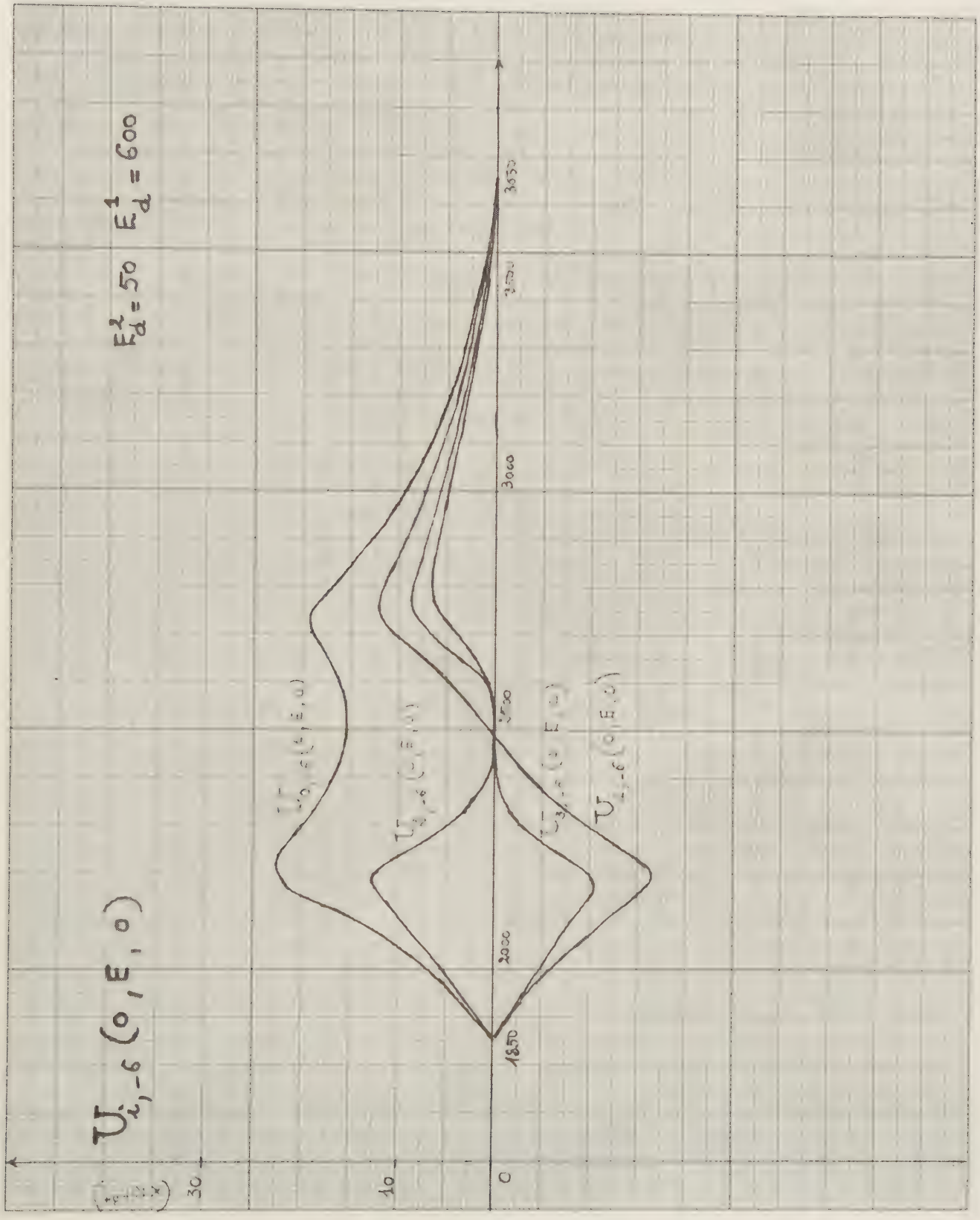


Fig 14 : $U_{\lambda,-6}(0,E,0)$ en fonction de E pour $E_d^2 = 50$ $E_d^1 = 600$ $(\lambda = 0,1,2,3)$

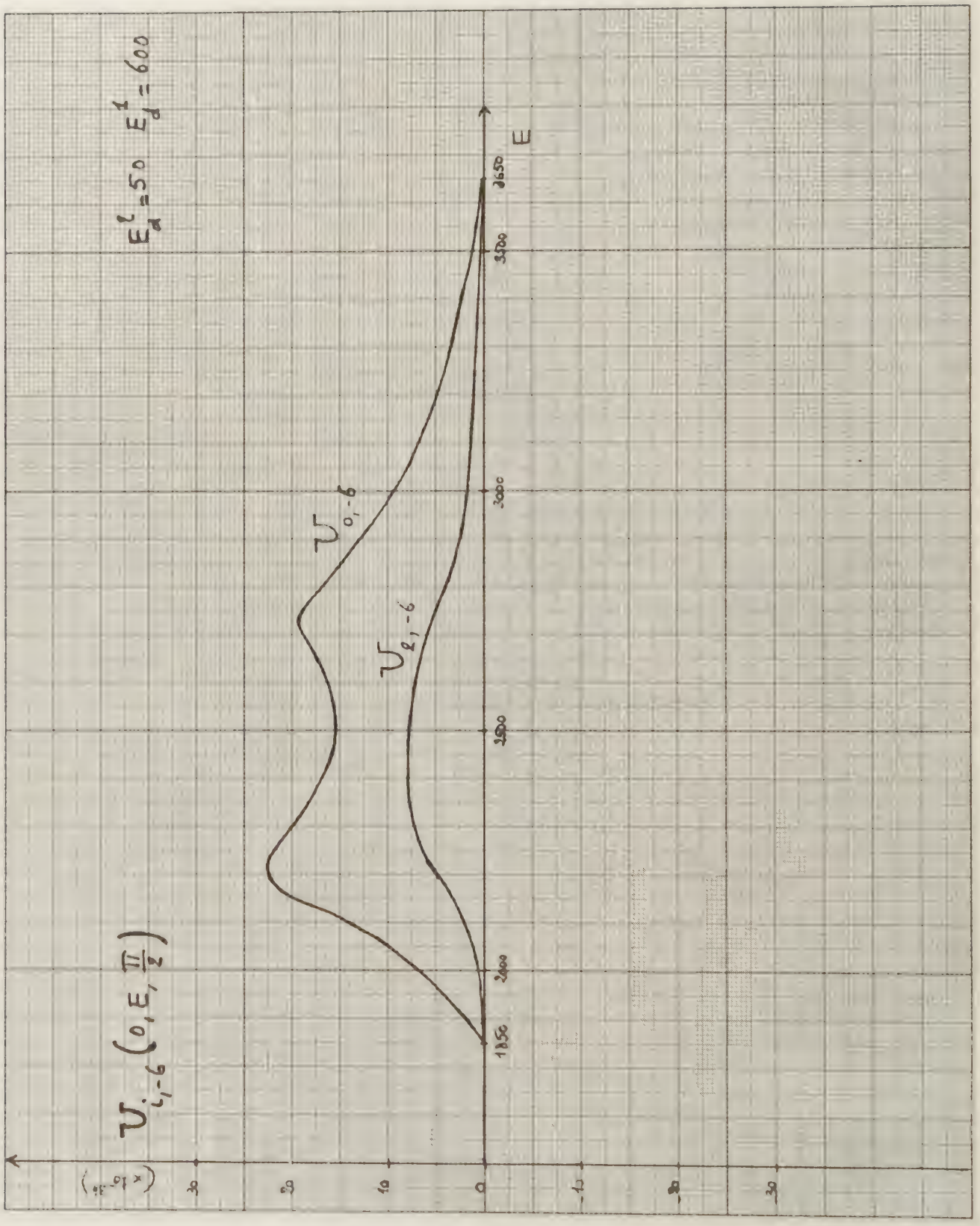


Fig 15 : $U_{i,-6}\left(0, E, \frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de E pour $E_d^2 = 50$ $E_d^1 = 600 \; (i = 0, 1, 2, 3)$

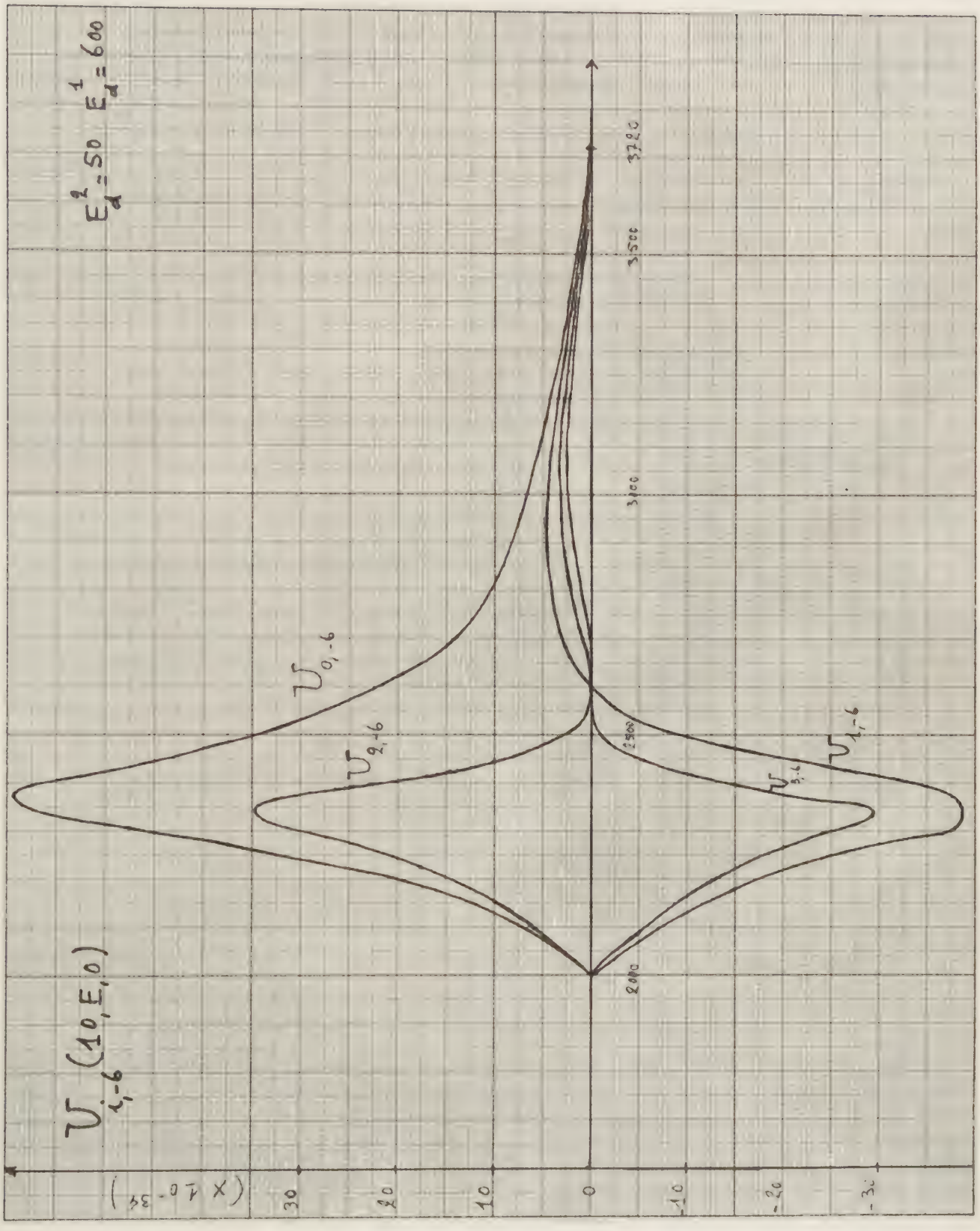


Fig 16 : $U_{i,-6}(10,E,0)$ en fonction de E pour $E_d^2 = 50$ $E_d^1 = 600$ $(i = 0,1,2,3)$

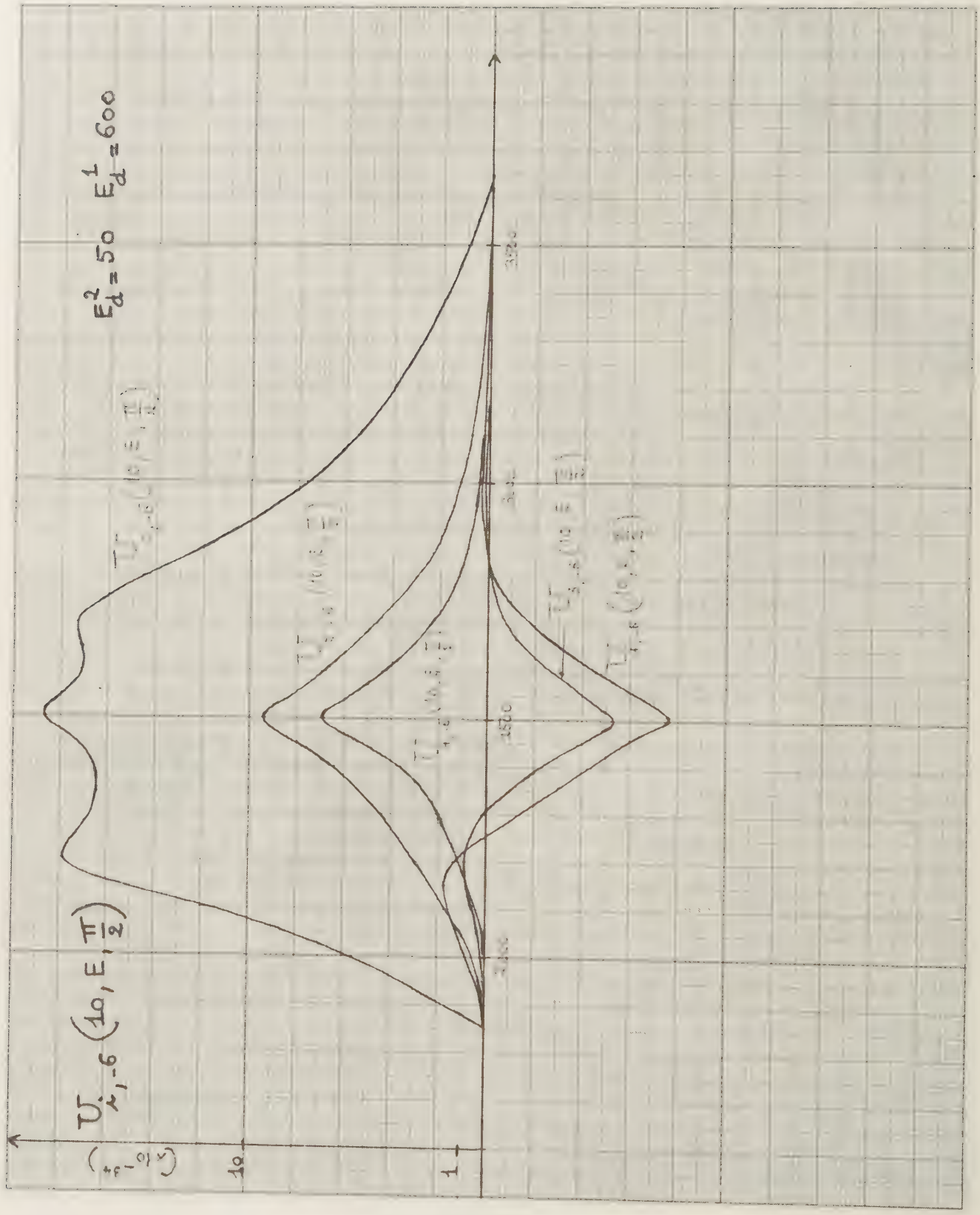


Fig 17 : $\overline{U}_{i,-6}\left(10, E, \frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de E pour $E_d^2 = 50$ $E_d^1 = 600$ $(i = 0, 1, 2, 3)$

$$f^1(E_d, \theta_d) = \sum_{i,0} a_{i,0} \cos^i \theta_d$$

Nous sommes donc amenés à étudier les spectres correspondant aux différents termes d'anisotropie de la fonction de distribution des deutérons accélérés soient $U_{i,0}(0,E,0)$ et $U_{i,0}\left(0,E,\frac{\pi}{2}\right)$. De l'étude de ces spectres, on pourra déduire les effets de leur combinaison linéaire à 0 et à $\frac{\pi}{2}$, donc les effets des termes d'anisotropie sur les deux directions en question.

En effet, à $E_\pi = 0$, nous savons que les spectres isotropes $U_{0,0}(0,E,0)$ et $U_{0,0}\left(0,E,\frac{\pi}{2}\right)$ sont identiques. Pour savoir comment se déforment les spectres dans ces deux directions, il faut donc pouvoir comparer les spectres $U_{i,0}(0,E,0)$ et $U_{i,0}\left(0,E,\frac{\pi}{2}\right)$ correspondant au terme d'anisotropie de f^1: $\cos^i \theta_d$.

Pour connaître ensuite l'effet de E_π , nous construisons, les 2 mêmes réseaux $U_{i,0}(0,E,0)$ et $U_{i,0}\left(0,E,\frac{\pi}{2}\right)$ pour $E_\pi \neq 0$ (fig. 12, 13). Nous avons choisi 10 keV une valeur assez forte, pour bien mettre en évidence les variations des courbes trouvées. Cette fois ce sont aussi bien les courbes $U_{0,0}$ et $U_{i,0}$ $(i \neq 0)$ qui se déformeront d'une manière différente à à 0 et à $\frac{\pi}{2}$, ce qui exprime le fait que mettre la cible en mouvement revient à ajouter de l'anisotropie en f^1 .

Nous avons présenté ci-contre les différentes courbes $U_{i,0}$ obtenues (fig. 12, 13). Ces différentes courbes correspondant à $E_d^2 = 50$ keV et à $E_d^1 = 600$ keV. Nous étudierons par la suite les effets des variations des paramètres E_d^2 et E_d^1 sur les différentes courbes de base.

Après avoir étudié les effets des termes d'anisotropie, nous devons étudier les effets des termes en j sur le développement de f^1 . Nous avons alors tracé les mêmes réseaux de courbes pour $j = -6$: $U_{i,-6}(0,E,0)$, $U_{i,-6}\left(0,E,\frac{\pi}{2}\right)$; $U_{i,-6}(10,E,0)$ et $U_{i,-6}\left(10,E,\frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 14, 15, 16, 17).

La comparaison des différents réseaux de courbe met en évidence que le paramètre j joue sur la pente des courbes, leur largeur à mi-hauteur (pour les courbes isotropes) et la position des sommets.

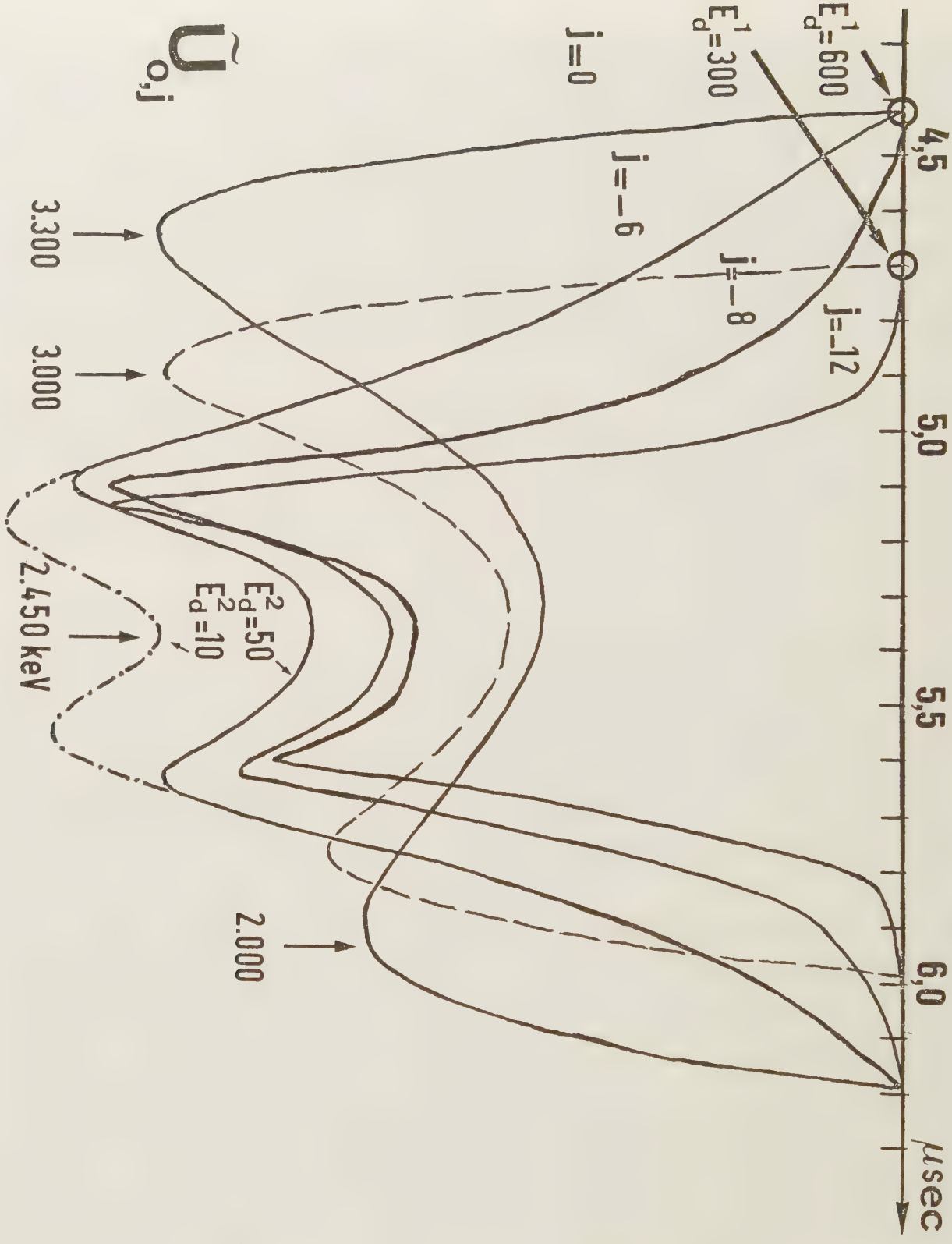


Fig. 18 : $\tilde{U}_{o,j}(o,t,o)$ en fonction de t en faisant varier j, E_d^1, E_d^2

I.A.3. Effet de E_d^1, E_d^2, j.

Pour suivre le rôle de j dans ces variations nous avons considéré les déformations de la courbe $\hat{U}_{0,j}(0,t,0)$ quand j prend les valeurs 0, -6, -8, -12, E_d^2 et E_d^1 étant donnés respectivement égaux à 50 et à 600. Le réseau de courbes que nous avons tracé fait très nettement apparaître les variations des pentes des courbes à l'origine, le changement du sens de la concavité, la variation de la largeur à l'origine et la variation plus minime de la position des sommets. Ce réseau est plus parlant, puisque ce sont les formes des courbes en t qui se comparent à l'expérience (fig. 18).

Sur ce graphique, nous avons également tracé la courbe $\tilde{U}_{0,0}(0,t,0)$ correspondant à $E_d^1 = 300$ ($E_d^2 = 50$). Nous savons que, connaissant E_d^1, on peut en déduire les valeurs extrêmes E^2 et E^1 du support de $U_{i,j}$. Du tracé de la courbe $D(E_d, 0, E, \theta_\pi) = 0$, nous tirons la conclusion que E^2 croît et que E^1 décroît quand E_d^1 décroît ; le temps t_1 correspondant à E^1 va donc croître quand E_d^1 décroît et inversement pour t_2 correspondant à E_2. E_d^1 joue donc sur le support de $U_{i,j}$ qu'il élargit quand il croît.

Pour E_d^2, on a essayé de voir les effets de sa variation sur la courbe $\tilde{U}_{0,-6}(0,t,0)$. E_d^2 d'une part fait croître, lorsqu'il diminue, une partie des ordonnées et d'autre part change légèrement la position des sommets, en les rapprochant lorsqu'il diminue.

I.B. Injections préférentielles.

Pour terminer l'étude des effets de l'anisotropie de la distribution f^1 sur les formes des spectres à 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, on est amené à étudier l'effet d'injections fortement préférentielles sur les spectres correspondants.

I.B.1. Injection à 0.

Construire une courbe de distribution f^1, correspondant à une majorité de particules dont les vitesses sont dirigées suivant Oz (l'axe de la manipulation), est assez délicat dans le cas de notre développement en puissance de cos.

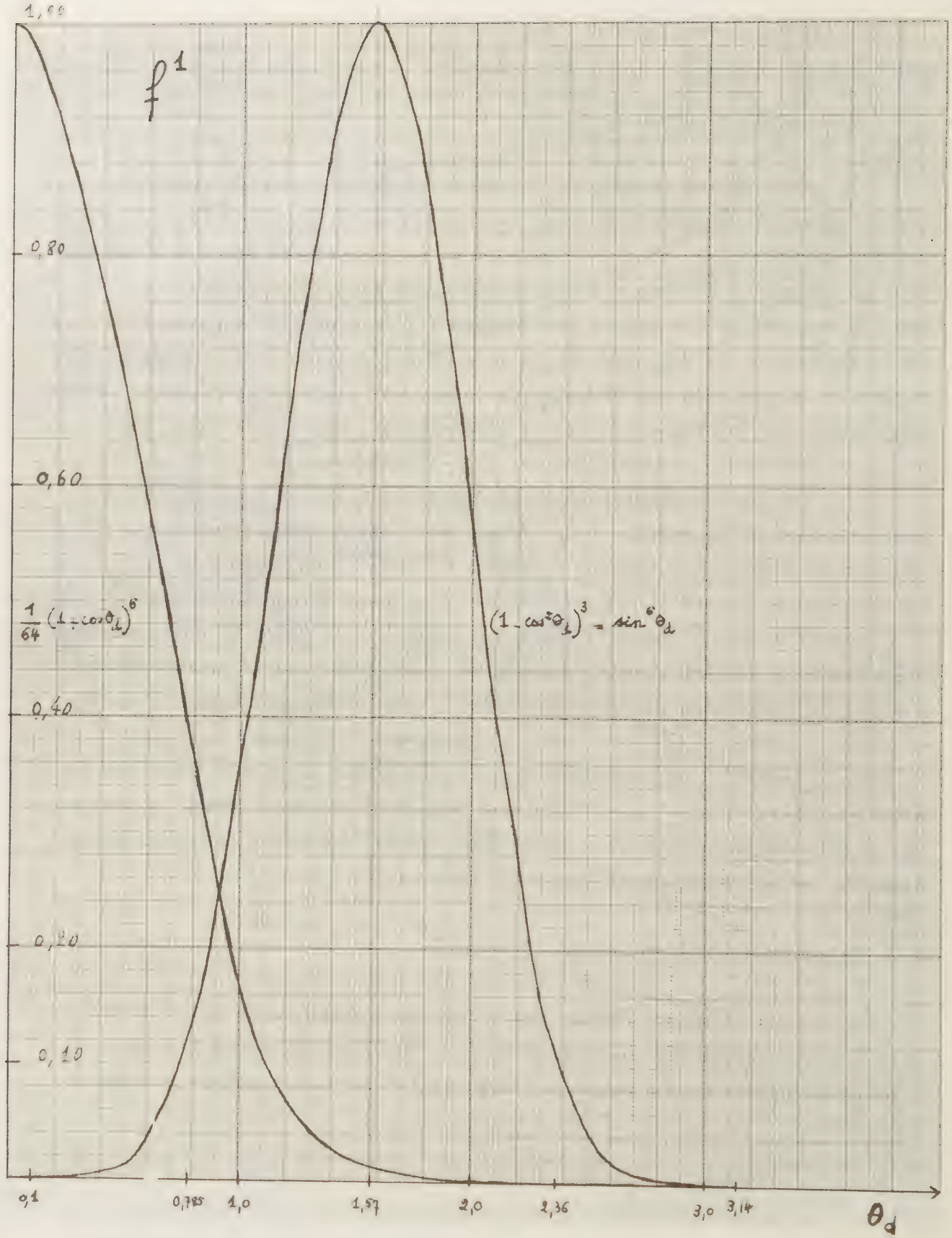


Fig 19 $f^1 = \frac{1}{64}(1+\cos\theta_d)^6$ et $f^1 = (1-\cos^2\theta_d)^3$

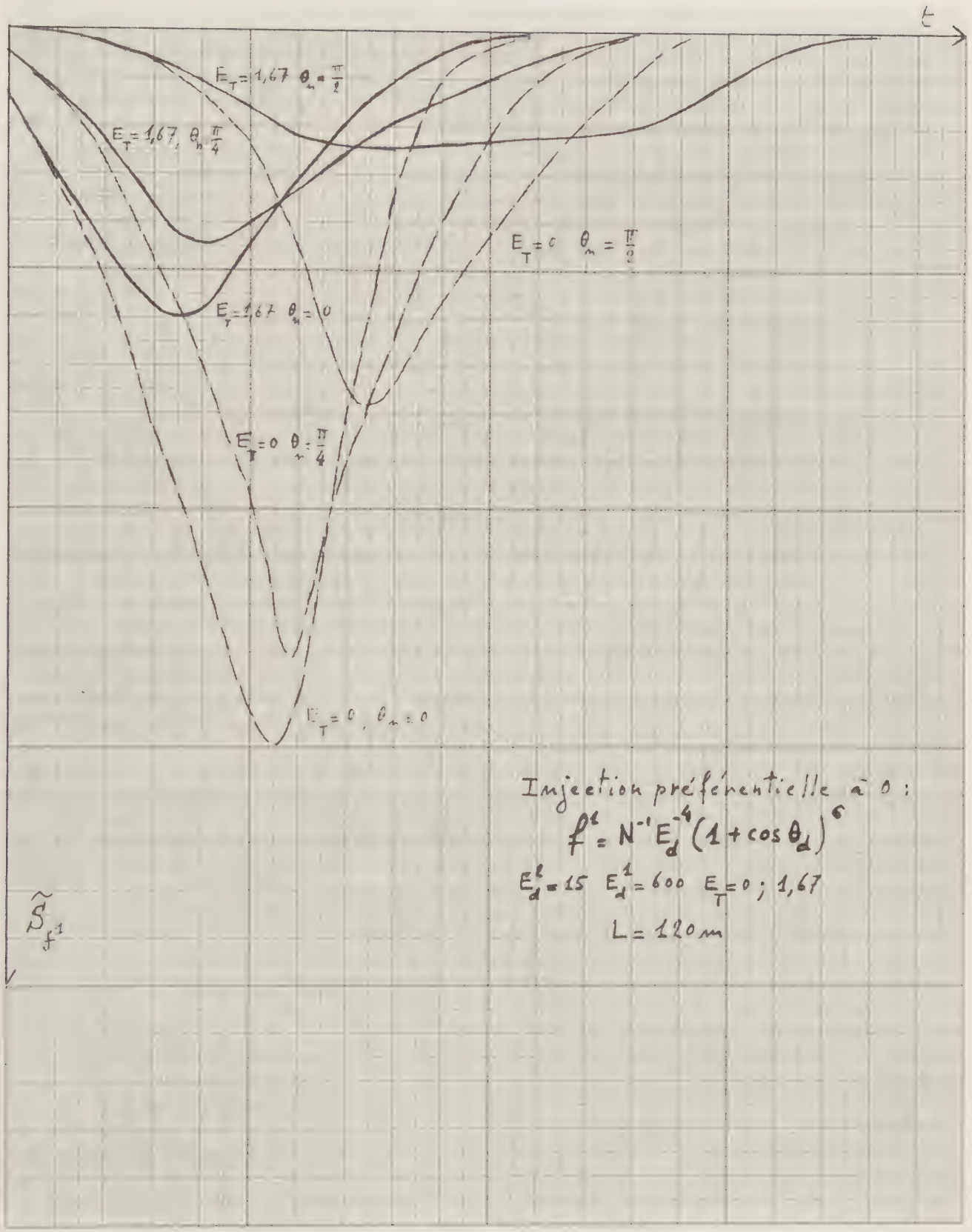


Fig 20 : Injection préférentielle à 0 : Spectres pour $E_T = 0 ; 1,67$.

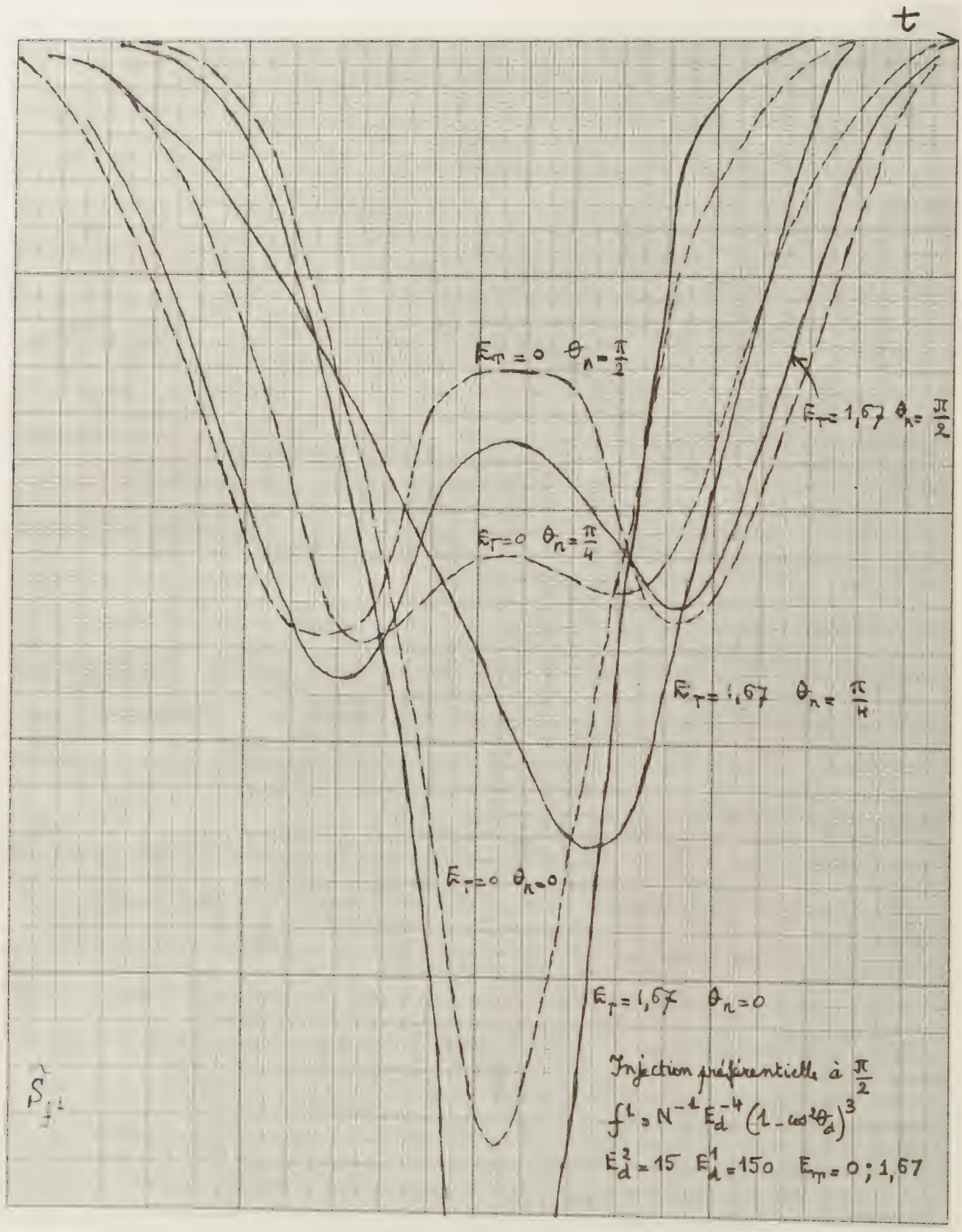


Fig 21 : Injection préférentielle à $\frac{\pi}{2}$: Spectres pour $E_T = 0 ; 1,67$

Pour pouvoir construire simplement une fonction de ce type. De même que pour nos problèmes futurs, nous prendrons une fonction f^1 à variables séparées :

$$f^1(E_d, \theta_d) = N^{-1} E_d^{-4} (1 + \cos\theta_d)^6$$

ce qui revient à prendre j = - 8 et 7 termes au développement en cos : i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Sans que la courbe f^1 corresponde à une fonction d'injection à 0 idéale, on obtient ainsi une bonne injection préférentielle (fig. 19).

Nous avons alors construit les spectres correspondants S_{f1} dans les conditions suivantes ; E_d^2 = 15 keV , E_d^1 = 150 keV, et pour différentes valeurs de E_π , 0 et 1,67 : $S_{f1}(0;E;0)$, $S_{f1}(0;E;\frac{\pi}{4})$, $S_{f1}(0;E;\frac{\pi}{2})$, $S_{f1}(1,67;E;0)$, $S_{f1}(1,67;E,\frac{\pi}{4})$ $S_{f1}(1,67;E;\frac{\pi}{2})$. La déformation du réseau des courbes initiales pour E_π = 1,67 est un point important pour l'étude de l'influence de E_π : l'apparition de E_π y joue bien toujours le même rôle, diminuer les effets d'anisotropie, lorsqu'ils existent (fig. 20).

I.B.2. Injection à $\frac{\pi}{2}$ (fig. 19).

La courbe f^1 choisie est :

$$f^1(E_d, \theta_d) = N^{-1} E_d^{-4} (1 - \cos^2\theta_d)^3$$

Nous avons pris E_d^2 = 15 et E_d^1 = 150, E_π = 0; 1,67 et nous avons tracé les courbes $S_{f1}(0;E;0)$, $S_{f1}(0;E;\frac{\pi}{4})$, $S_{f1}(0;E;\frac{\pi}{2})$, $S_{f1}(1,67;E;0)$, $S_{f1}(1,67;E;\frac{\pi}{4})$; $S_{f1}(1,67;E;\frac{\pi}{2})$ (fig. 21)

Plus nettement encore que dans le cas précédent, on voit l'apparition de E_π faire jouer l'anisotropie en sens opposé.

I.B.3. Forme de f^1 choisie pour le dépouillement.

A la lueur de ces différents résultats, notre choix d'une forme de la fonction f^1 susceptible au moins de nous permettre de chercher une première approximation des spectres expérimentaux, aussi bien à 2 directions qu'à 3 directions, s'est fait de la manière suivante :

- fonction à variables séparées : c'est, bien sûr, tout d'abord une facilité pour le calcul, cela permet d'isoler le paramètre j comme permettant de rendre compte des pentes et de la largeur à mi-hauteur, cela présente l'inconvénient de ne pas utiliser toutes les possibilités polynômiales en j.
- polynôme du troisième degré en $\cos\theta_d$: c'est compatible avec les trois directions d'observation de MORONVILLIERS, cela revient à limiter le développement en $\cos\theta_d$ pour éviter les oscillations. Même sous cette forme c'est donner la prééminence à θ_d, donc à l'anisotropie sur les variations du spectre $S_{f^1}(E_n, E, \theta_n)$ ce qui n'est pas prouvé.
- le choix du support de f^1 a donné lieu à de multiples tâtonnements : pour E_d^1 qui, normalement est déterminé complètement par l'équation (B7) mais qui est entaché d'une grosse erreur expérimentale d'appréciation. En général cependant 600 keV, la première valeur utilisée, a paru trop forte et a été abandonnée au profit de valeurs inférieures ou égales à 350 keV. Pour E_d^2, si l'on ne pouvait pas descendre en dessous de 10 keV, par contre le choix d'une valeur de cette énergie de coupure était d'autant plus délicat que l'on n'a aucun élément précis pour la déterminer et que, par ailleurs, elle joue considérablement sur la valeur du flux, comme nous l'avons précédemment montré. Nous avons essayé diverses valeurs allant de 10 keV à 100 keV. Une valeur moyenne comme 30 keV a souvent été utilisée. C'est un élément que nous examinerons plus particulièrement quand nous tirerons les conclusions des résultats obtenus par notre modèle.

E_d^2 est, avec le nombre de termes en i et les valeurs de j, le paramètre dont le choix fait le plus apparaître les limites de notre modèle.

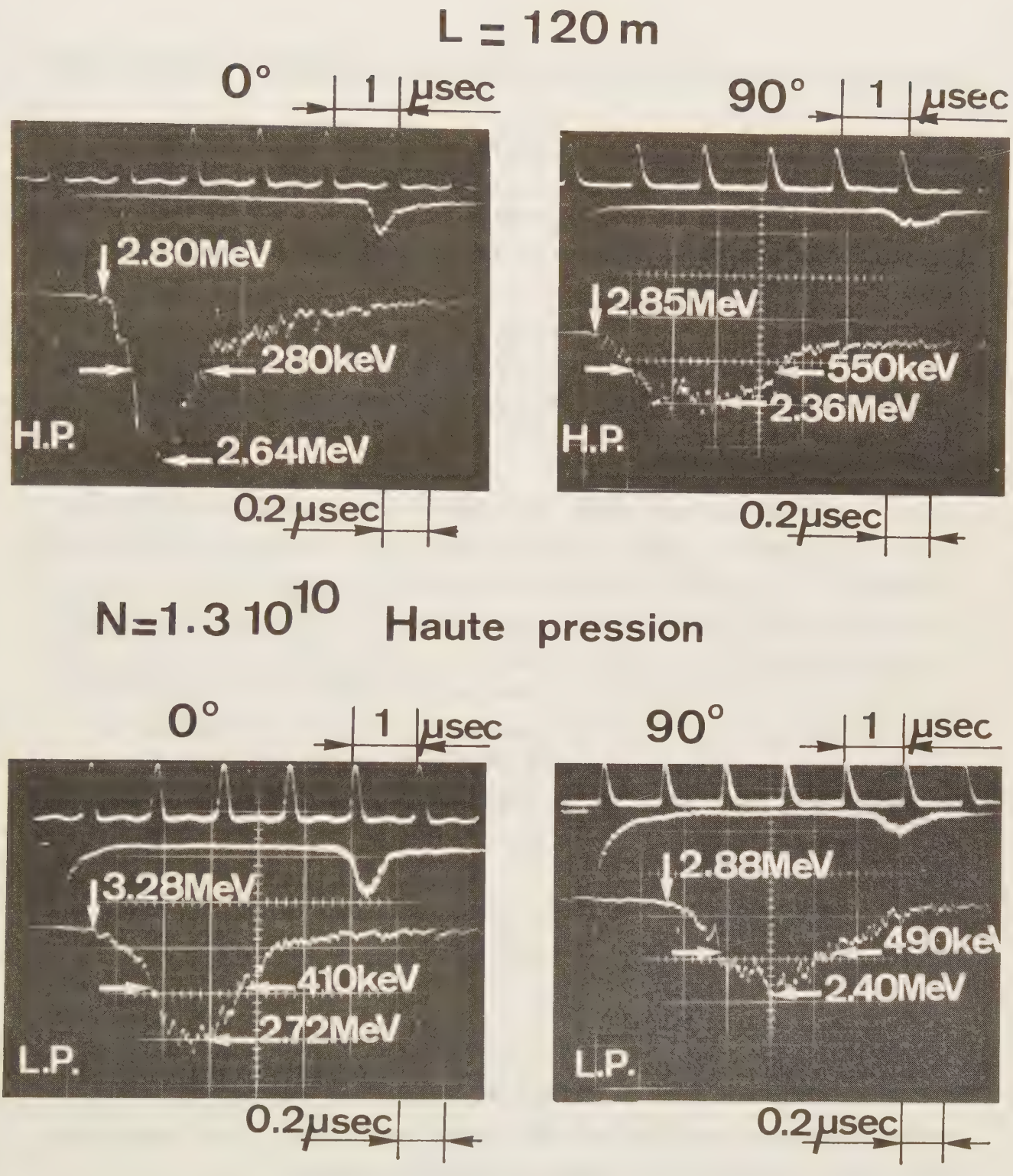


Fig. 22 : Oscillogrammes recueillis à 120 m dans les directions 0° et 90° pour deux régimes de pression

II. DEPOUILLEMENT DES COURBES EXPERIMENTALES POUR 2 DIRECTIONS (CAMPAGNE LIMEIL).

II.A. Présentation et études des courbes expérimentales sur un exemple.

Nous prenons les oscillogrammes correspondant à deux tirs, exécutés à LIMEIL, avec deux bases de temps de vol de 120 m chacune dans les 2 directions 0 et $\frac{\pi}{2}$ (fig. 22).

Sur chaque oscillogramme nous avons deux traces, avec en plus le marquage temporel de la trace du haut avec un marqueur grande précision (10^{-6}) de période 1 μs.

La trace du haut compte deux impulsions : une impulsion initiale qui est l'impulsion X durs supposée en phase avec l'impulsion neutronique à la source et l'impulsion neutronique après que les neutrons ont parcouru les 120 m de la base de temps de vol. Elle se situe environ 5 μs après le départ. Evidemment une telle présentation suppose que l'émission neutronique permet de travailler sur des moyennes temporelles, comme nous l'avons annoncé au début de cet exposé. Comme, par ailleurs, il n'y a pas de collimation, le spectre obtenu est également intégré sur l'espace, le volume observé est évidemment très petit vis-à-vis de l'énorme distance de la base de temps de vol.

La trace du bas est l'impulsion neutronique dilatée en temps, pour pouvoir faire une observation fine, en temps donc en énergie.

II.A.1. Calage temporel.

Le minimum de ξ se calcule en prenant les spectres en énergie, ceci pour pouvoir travailler sur une donnée intrinsèque : notre dépouillement se fait en prenant une échelle linéaire en énergie.

Connaissant L égal à 120 m, nous réalisons (par le calcul machine) le tableau de correspondance $t = \sqrt{\frac{m}{2E}}\, L$ avec $m = 10,44$, par pas ΔE de 20 keV, de $E = 1\,600$ à $E = 3\,800$.

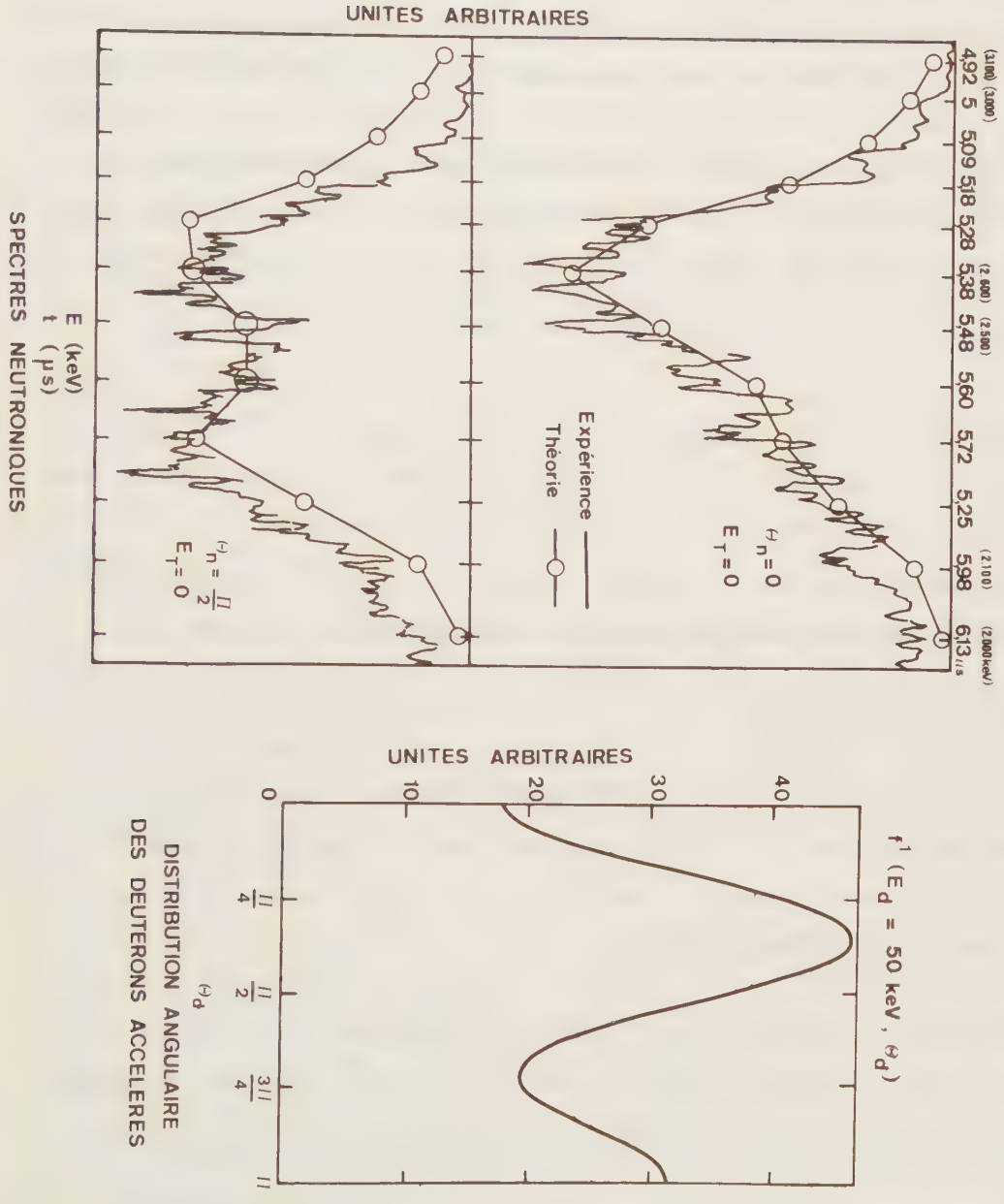


Fig. 23 : Dépouillement du tir n° 2 040 : Points théoriques reportés sur oscillogrammes et fonction f^1 pour E_d = 50 keV

Pour pouvoir lire le spectre dilaté suivant une échelle linéaire en énergie il faut pouvoir "marquer" un point en énergie, donc en temps, pour pouvoir ensuite y accrocher l'ensemble de notre échelle. Pour ce faire nous repèrons un point de la trace du bas bien visible sur la trace du haut et c'est ce point de la trace du haut que nous allons devoir caler en temps. Le repérage par rapport à l'origine (pied de l'impulsion X dur) de ce point se fait assez facilement par mesure et interpolation, grâce à la base de temps enregistrée au-dessus. Si nous tenons compte du fait que les X durs se déplacent à la vitesse de la lumière, nous devons ajouter au temps trouvé :

$$\left(120 \times \frac{10^{-8}}{3}\right)_{,5} = 400\ ns$$

Après identification du repère, nous pouvons alors disposer notre échelle linéaire en énergie dont nous prenons le pas égal à 100 keV.

Exemple : pour le tir 2040 (fig. 23), à 0°, le point repère est à 4,92 + 0,4 = 4,96 µs soit à une énergie de 2 655 keV, à 90° il correspond à 5,15 + 0,40 = 5,55 soit 2 440 keV. Nous disposons alors les points de 2 000 à 3 100 keV sur le spectre dilaté.

II.A.1.a. Résolution temporelle.

Nous travaillons en prenant un temps d'émission de 100 ns. Ceci correspond dans notre cas à des temps de l'ordre de 5 µs, et à des énergies de l'ordre de 2 500 keV (5,483 correspond à 2 500), soit à une précision :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\Delta t}{t} = \frac{200}{5000} = \frac{100}{2500}$$

Nous avons pris un pouvoir de résolution moyen de 100 keV, celui-ci variant évidemment en fonction de l'énergie. Par exemple, 5,005 correspondent à 3 000, on aurait alors obtenu 120 keV.

II.A.1.b. Erreur de chronologie.

Toute la chronologie, donc toute l'identification en énergie va découler de la reconnaissance du point repère. Or cette reconnaissance est entachée d'un certain nombre d'erreurs :

- le pic X-dur et l'impulsion neutronique ne sont pas rigoureusement en phase : nous évaluons l'erreur à 15 ns ;
- la mesure du temps se fait à la règle à partir des impulsions du marqueur, lesquelles ne sont pas régulièrement espacées, ce qui introduit une erreur que nous évaluons à 25 ns ;
- la forme même des impulsion introduit des écarts suivant que l'on fait des mesures au pied, à mi-hauteur ou au sommet : ce que l'on évalue à 30 ns. Bien sûr, on atténue ces erreurs en faisant la mesure sur plusieurs impulsions ;
- le point de départ déterminé par le flanc de l'impulsion X dur est mal connu, nous faisons entrer cette indétermination dans l'indétermination sur l'échelle, ce qui justifie amplement les 55 ns précédents (25 + 30) ;
- le point repère lui-même est mal défini : disons 20 ns sur l'impulsion dilatée ;
- les erreurs de parallélisme dans la lecture par rapport à la grille et les erreurs sur la lecture de cette grille, sur l'impulsion dilatée, entraînent une nouvelle erreur de 10 ns. Au total :

$$15 + 25 + 30 + 20 + 10 = 100 \text{ ns.}$$

On trouve allègrement 100 ns sur 5 µs soit 2 %, ce qui constitue une excellente précision.

Affirmer que la chronologie est définie à 100 keV près, paraît une borne inférieure de l'erreur commise.

Par ailleurs, il faut remarquer qu'à cette erreur, il faut en toute logique ajouter les 100 keV de l'émission, puisque nous ne savons pas si les neutrons comptabilisés ont été émis au début ou à la fin de l'émission.

Cette erreur autorise des recalages d'au moins 100 keV pour mieux lisser les courbes grâce à notre modèle.

II.A.2. Atténuation.

Le coefficient $K(E, \theta_n)$ que nous avons à manipuler pour ramener le spectre à l'origine ou dans le cas d'égalité de L pour les 2 directions 0 et $\frac{\pi}{2}$ se simplifie notablement. Si nous conservons les coefficients de la direction fictive $\frac{\pi}{4}$ comme coefficients de normalisation, en les prenant égaux à ceux de 0, nous obtenons

$$K(E, \theta_n) = \frac{\dfrac{a(\theta_n) \times \mu(E, \theta_n)}{a\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \mu\left(E_{\mu_{min}}, \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{\left[\mu(E) - \mu_{min}\right] p L(\theta_n)}}$$

II.A.2.a. Etalonnage à 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On n'avait pas étalonné les 2 voies 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc on ne connaissait pas le rapport $a(\theta_n)$ des 2 chaînes de mesure. On a dû prendre ce rapport égal à 1.

II.A.2.b. $L(\theta_n)$ est assez petit.

Si on calcule l'exposant de e pour E = 2 300 keV, on trouve :
$0{,}03 \times 10^{-1} \times 1{,}293 \times 10^{-3} \times 1{,}2 \times 10^{4} = 3 \times 1{,}293 \times 1{,}2 \times 10^{-2} = 4{,}65 \times 10^{-2}$.
Ce terme est pratiquement égal à 1. Les autres termes ne s'écartent pas trop de 1, sauf pour les valeurs extrêmes de E. Nous avons négligé cet effet. Mais fait essentiel, cela ne remet pas en question les valeurs de calage trouvées.

II.A.3. Lissage.

Enfin la lecture de l'impulsion dilatée se réalise en procédant à un lissage, qui, en premier lieu, supprime les pics erratiques et qui, par

ailleurs, supprime les oscillations. Autant que possible, le lissage passe au milieu du bruit. C'est à partir de ces points que nous lisons l'ordonnée des points répartis par pas de 100 keV que nous extrayons de la courbe.

Après tous ces travaux d'approche la courbe est prête pour le dépouillement.

II.A.4. Caractéristiques des courbes expérimentales.

Après ces différentes études il nous reste à présenter les quantités dont nous allons particulièrement essayer de rendre compte par notre schéma, ce sont :

- les pieds des courbes à 0 et à $\frac{\pi}{2}$: c'est-à-dire les points de départ des courbes aux temps courts qui correspondent aux neutrons les plus rapides. L'étude précédente à fait apparaître que, contrairement à la théorie, ces pieds ne coïncident pas ; on va donc avoir une certaine tendance à décaler les courbes en temps, donc en énergie, pour les superposer ;
- les calages temporels des sommets et du point milieu à $\frac{\pi}{2}$ (quand la courbe a 2 bosses) et, de plus, les calages relatifs entre 0 et $\frac{\pi}{2}$;
- les largeurs à mi-hauteur et les pentes des 2 courbes ;
- l'amplitude relative des sommets : mais dans notre cas, cela ne signifie pas grand chose, puisqu'il n'y a pas eu étalonnage préalable des 2 voies.

II.B. Dépouillement des résultats expérimentaux sur un exemple :

Nous avons choisi de présenter le tir 2040 (fig. 23). La pression dans la chambre était de 17 torr, et le nombre total de neutrons émis a été de $1,66 \times 10^{10}$.

II.B.1. Choix de E_T

Dans tous les dépouillements, on commence par envisager la solution $E_T = 0$, ce n'est qu'après avoir obtenu des premiers résultats de dépouillement qu'on pourra essayer des valeurs différentes de 0.

II.B.2. Choix de E_d^1

Nous travaillons sur les pieds des spectres en temps, correspondant aux temps courts. Nous travaillons sur les deux directions qui nous donnaient initialement comme points de départ des spectres : 3 060 keV à $\theta_n = 0$, 3 000 keV à $\theta_n = \frac{\pi}{2}$. Après un certain nombre d'essais et d'ajustements temporels (consistant en des décalages des courbes), nous fixons une valeur commune de 3 200 keV. Nous pouvons alors donner le tableau suivant correspondant à $\Sigma_r = 0$.

E^1	E_d^1
2 800	80
2 900	120
3 000	172
3 100	228
3 200	288
3 220	300
3 280	340
3 297	350
3 370	400
3 646	600

Notre choix s'est arrêté sur $E_d^1 = 350$ valeur permettant d'englober le point 3 200. En fait, nous recalons les courbes expérimentales sur les courbes théoriques, pour ce qui est du calage des sommets et des valeurs moyennes, lorsqu'il y a deux bosses.

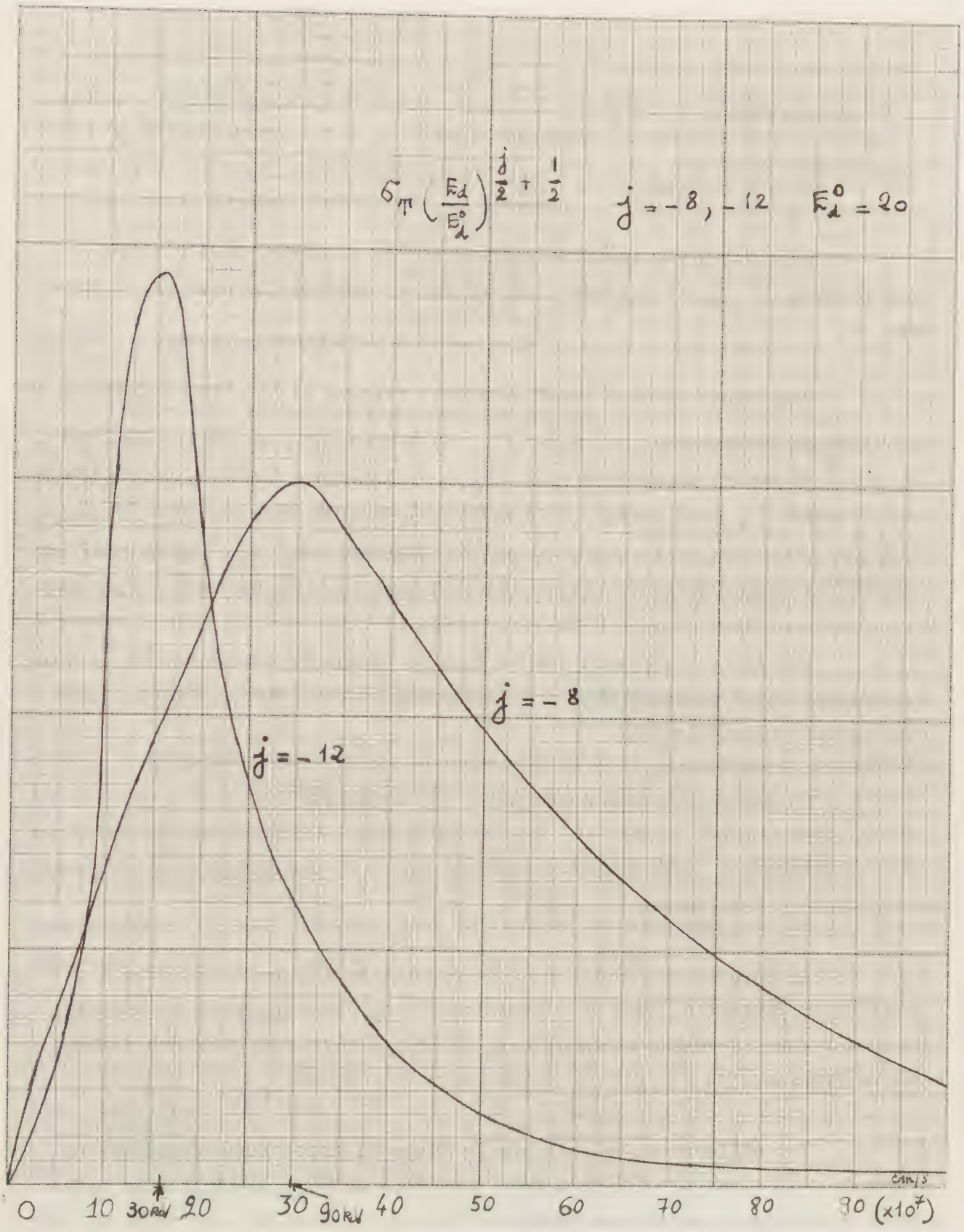


Fig. 24 : σ_π en fonction de E_d

II.B.3. Choix de E_d^2

II.B.3.a. Calculs pratiques.

Nous avons souligné les difficultés de ce choix. Tout d'abord, nous prenons $E_d^2 \geqslant 10$ puisque c'est la valeur maximum que nous envisageons pour E_π.

Nous avons ensuite tracé, pour deux valeurs de j, les courbes de variation de la fonction $\sigma_\pi E_d^{\frac{j}{2}+\frac{1}{2}}$. On a pris $j = -8 ; -12$. Pour $j = -8$ on trouve un maximum pour $E_d = 90$ keV. On a bien une décroissance vers 0 quand E_d tend vers 0. A ce moment si on considère la quantité $\frac{N^{-1}(\alpha_{ij})\, S_{ji}}{n_d n_\pi}$, on voit que l'on devrait prendre $E_d^2 \leqslant 30$ keV, si on veut que la valeur de cette intégrale ne dépende pas trop de E_d^2 (fig. 24).

Par ailleurs, on sait que le flux en dépend fortement par N^{-1}. Nous examinerons cette question dans nos conclusions sur ce dépouillement, quand nous aurons calculé le flux.

En définitive nous avons pris $E_d^2 = 30$ keV.

II.B.3.b. Discussion - problèmes soulevés par le choix de ce paramètre.

La coupure introduite dans la population des deutérons dépend du choix de ce paramètre. Même si l'expérience nous donne un ordre de grandeur de 10 keV pour la valeur minimum, cela n'est pas suffisant pour une détermination précise.

Par ailleurs on va voir que la valeur du flux dépend fortement du choix de E_d^2 par N^{-1}. Cela peut donc être un moyen d'ajuster ce paramètre pour obtenir une valeur raisonnable de $n_d n_\pi$ donc de n_d si on connaît n_π.

On peut également espérer jouer avec E_d^2 sur l'écartement des deux sommets à $\frac{\pi}{2}$, donc sur le calage entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ qui en dépend.

Remarquons cependant que E_d^2 introduit dans l'intégrale S_{f1} un point de discontinuité de la dérivée et que nous ne pouvons trop le faire varier sous peine de voir la courbe théorique prendre une forme incompatible avec les forme lissées issues de l'expérience.

II.B.4. Choix de j.

II.B.4.a. Problème des pentes.

Avec j nous jouons sur les pentes des courbes et les largeurs à mi-hauteur. Particulièrement à 0, on peut obtenir un ajustement presque parfait de ces pentes, en jouant sur j, (à E_d^1 fixé). En définitive nous avons fixé notre choix sur - 8 pour ce tir. La pente obtenue, qui est celle du flanc de départ (flanc descendant), ne semble pas trop mauvaise, quoiqu' elle paraisse un peu inférieure à la pente expérimentale. On n'a pas cherché à rendre compte du flanc arrière (pente montante).

II.B.4.b. Discussion des résultats obtenus.

Nous avons vu que les valeurs négatives de j nous donnent une concavité dirigée vers le bas qui est en bon accord avec celle des courbes expérimentales. Le problème est celui d'une valeur suffisante. Par ailleurs, on ne peut pas, trop augmenter en valeur absolue la valeur de j sous peine d'avoir une courbe $\sigma_T E_d^{\frac{j+1}{2}}$, dont le maximum se rapproche trop de 10. Notons également que pour la courbe f^1 qui est de la forme

$$f^1(E_d, \theta_d) = E_d^{\frac{j}{2}} \left(a_{0,j} + a_{1,j}\cos\theta_d + a_{2,j}\cos^2\theta_d + a_{3,j}\cos^3\theta_d\right)$$

l'on ne doit pas prendre j trop petit, sous peine d'avoir entre le nombre de particules à E_d^2 et celui à E_d^1 un écart trop considérable.

Si on prend $E_d^2 = 30$ et $E_d^1 = 350$, ce qui fait unrapport 10 en gros, nous aurons donc 10^3 pour $j = -6$, 10^4 pour $j = -8$ et 10^6 pour $j = -12$.

Cela ne paraît guère compatible avec l'expérience, au moins pour $\dot{j} = -12$, puisque cela revient à accumuler toutes les particules autour de E_d^2. Il faut éviter de prendre $\dot{j} = -12$, même pour tenir compte des pentes.

II.B.5. Choix de $\dot{\imath}$.

II.B.5.a. Nombre de termes du développement.

Nous avons retenu 4 termes de développement en $\cos\theta_d$, pour pouvoir couvrir l'ensemble des 2 et 3 directions. Bien sûr on peut, pour 2 directions, raccourcir à 3 termes le développement, cependant pour des raisons d'intérêt expérimental, c'est surtout l'anisotropie de l'injection des deutérons accélérés qui nous intéresse, nous avons préféré enrichir le développement en $\cos\theta_d$.

En définitive les termes choisis pour le développement de f^1 sont :

$$f^1(E_d, \theta_d) = E_d^{-4}\left(a_{0,-8} + a_{1,-8}\cos\theta_d + a_{2,-8}\cos^2\theta_d + a_{3,-8}\cos^3\theta_d\right)$$

II.B.5.b. Discussion.

Le problème du nombre de termes en $\dot{\imath}$ a été étudié en faisant varier le nombre de ces termes de 2 à 7. 2 est insuffisant, et 3 aussi ; 4 termes paraissent donc nécessaires pour mettre en évidence de véritables anisotropies.

II.B.6. Résultats.

II.B.6.a. Obtention de spectres et d'une fonction f^1 .

En définitive le dépouillement a été effectué dans les conditions suivantes :

$E_d^2 = 30$ $E_d^1 = 350$ $E_T = 0$ $\dot{j} = -8$ $\dot{\imath} = 0, 1, 2, 3.$

La courbe à $\theta_n = 0$ a été décalée de 85 ns en avance, celle à $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ a été décalée de 120 ns en avance.

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 24.

II.B.6.b. Erreurs, signification.

Nous trouvons alors :

$$\Xi(0) = 0{,}4972 \times 10^{-3}$$
$$\Sigma = 0{,}2749 \times 10^{-1}$$
$$\Xi / \Sigma = 0{,}1808 \times 10^{-1}$$

avec les valeurs de β

$$\beta_{0,-8} = 0{,}2300 \times 10^{-4}$$
$$\beta_{1,-8} = 0{,}2311 \times 10^{-4}$$
$$\beta_{2,-8} = -0{,}7294 \times 10^{-5}$$
$$\beta_{3,-8} = -0{,}2742 \times 10^{-4}$$

Si nous supposons l'erreur relative constante, on trouve alors comme "erreur relative" : $\sqrt{1{,}8 \times 10^{-1}} < 14\ \%$. Une erreur inférieure à 20 % est , bien sûr, très satisfaisante et nous considèrons qu'on a atteint le stade ultime des ajustements.

II.B.6.c. Essais d'étude de la convergence suivant le nombre des termes en λ.

Nous avons essayé des développements en cos θ_d dont le nombre des termes variait de 2 à 7, en obtenant les résultats suivants :

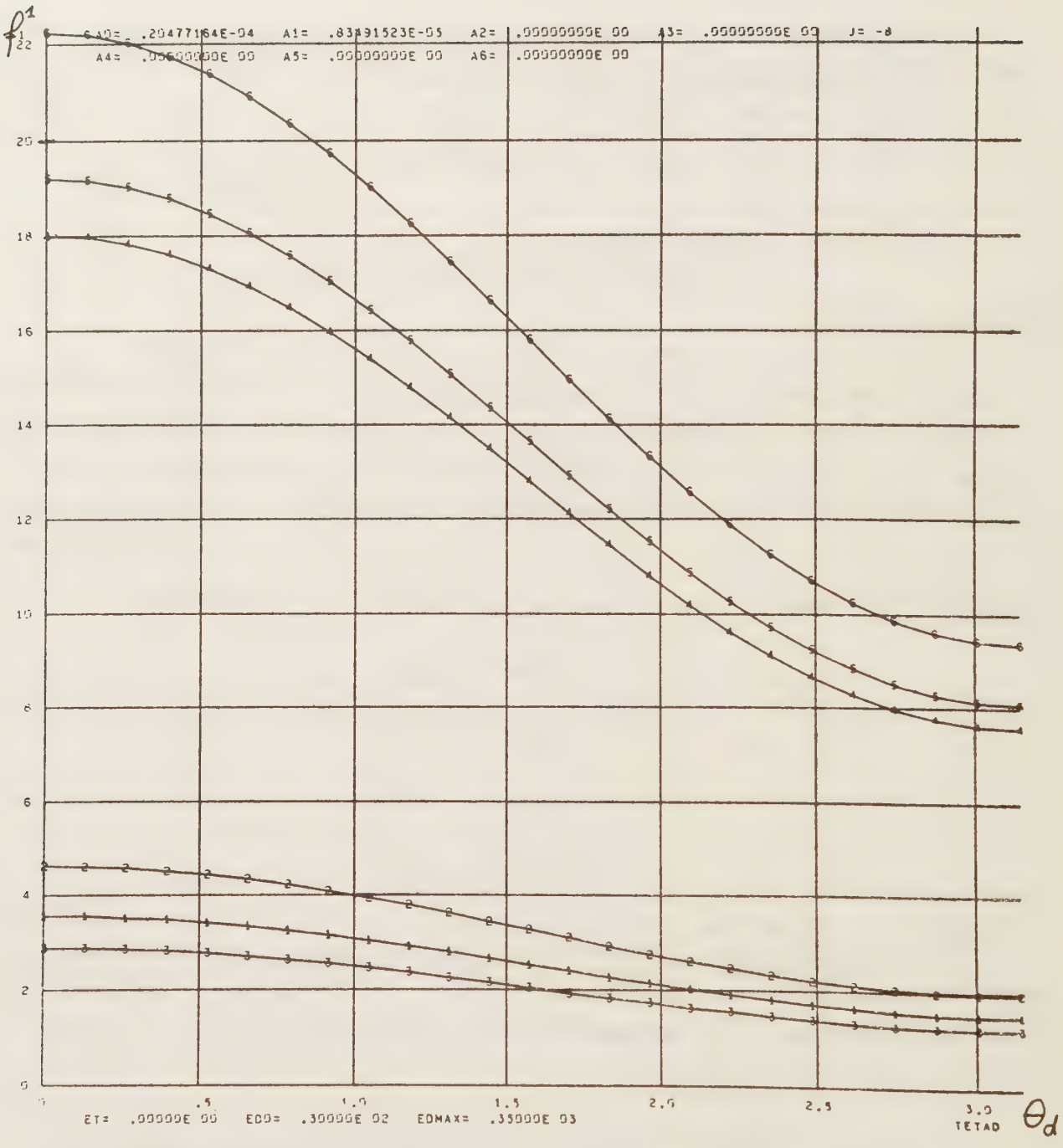

f_{22}^{1}
A0= .20477164E-04 A1= .83491523E-05 A2= .00000000E 00 A3= .00000000E 00 J= -8
A4= .05600000E 00 A5= .00000000E 00 A6= .00000000E 00
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
TETAD
θ_d
ET= .00000E 00 EDO= .30000E 02 EDMAX= .33000E 03

Fig 25 a

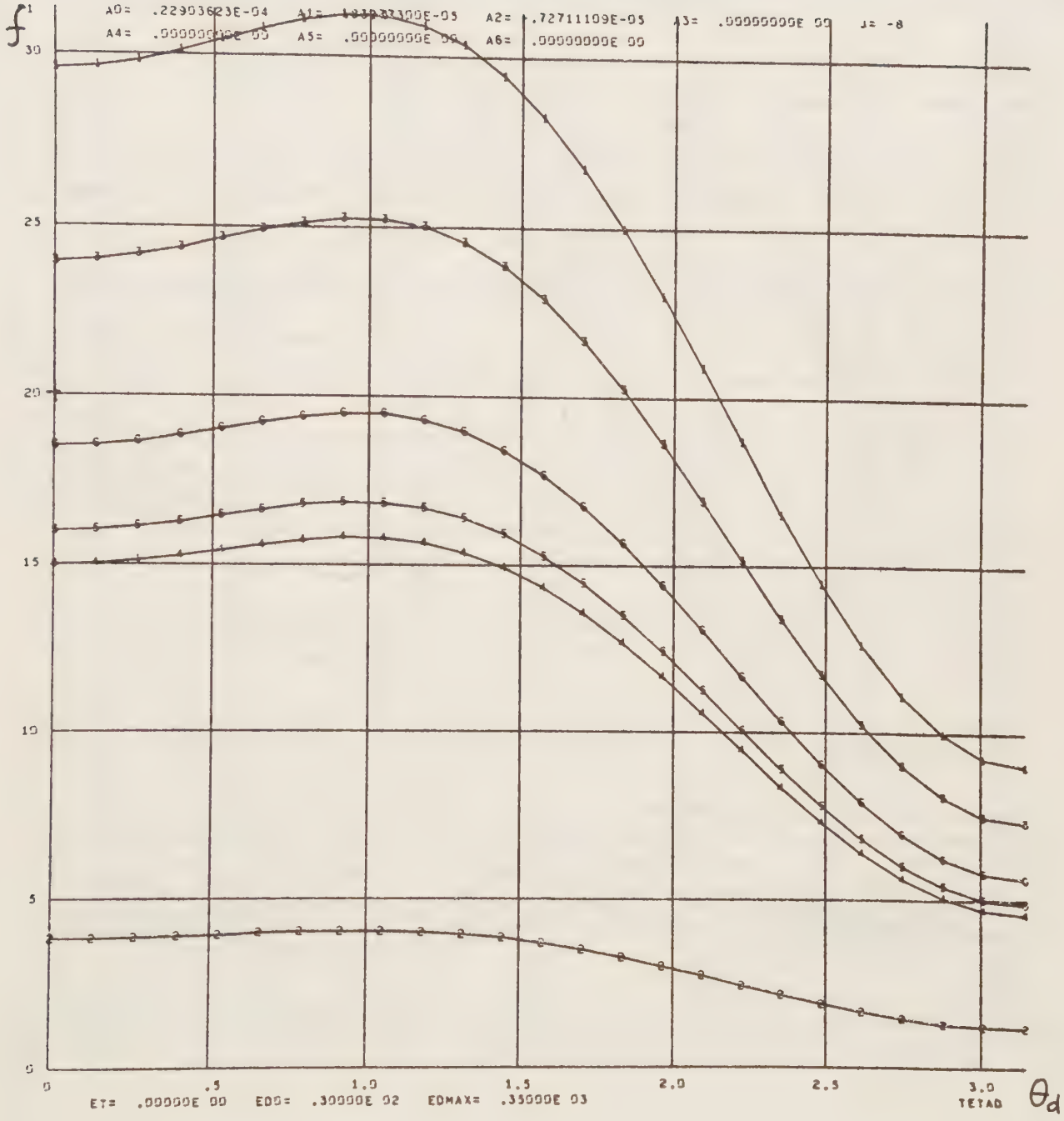

f
A0= .22903623E-04 A1= .10193100E-03 A2= .72711109E-05 A3= .00000000E 00 J= -8
A4= .00000000E 00 A5= .00000000E 00 A6= .00000000E 00
30
25
20
15
10
5
0
0
.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
TETAD
θd
ET= .00000E 00 EDO= .30000E 02 EDMAX= .35000E 03

Fig 25 b

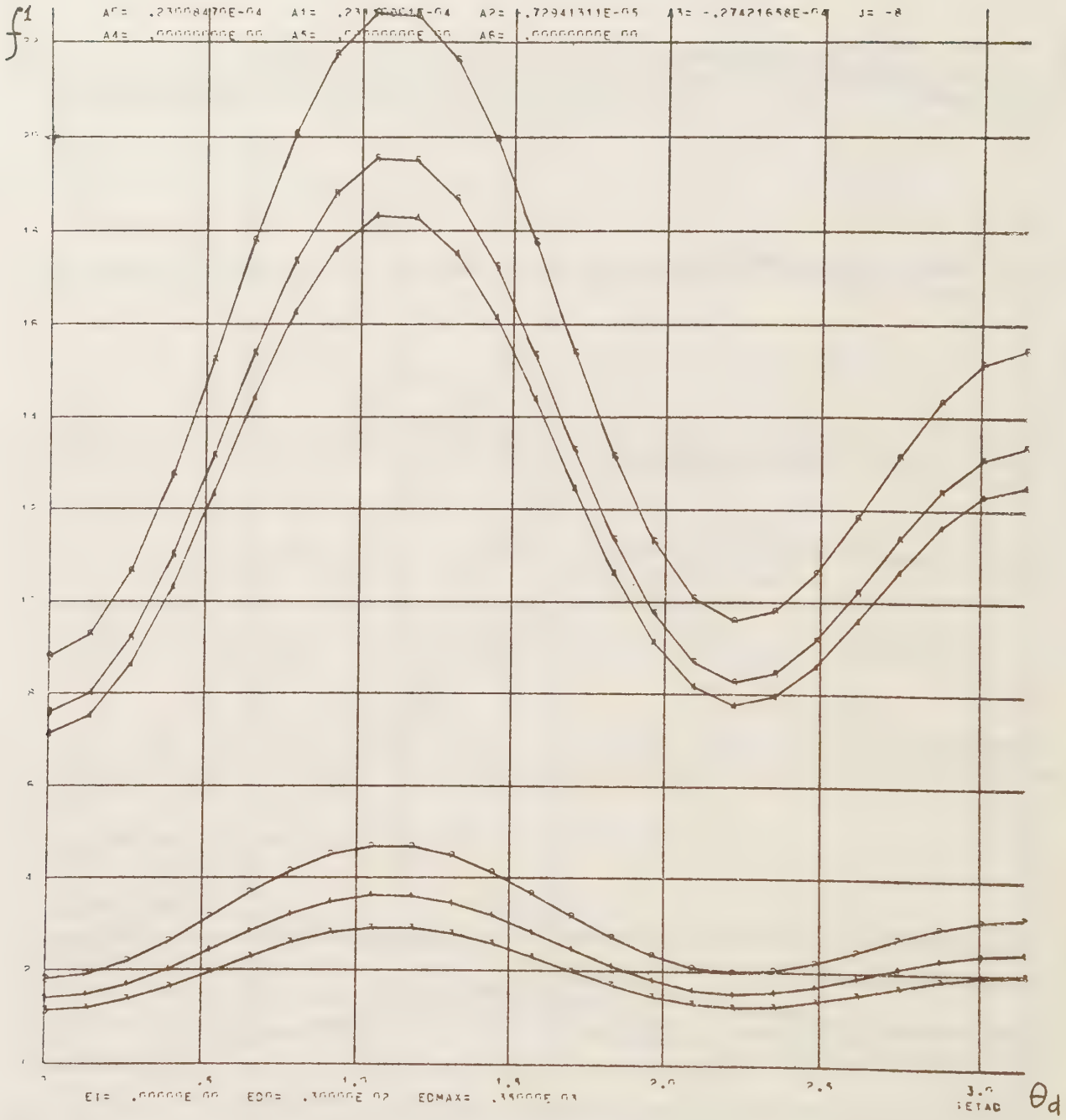

f1
A0= .23008470E-04 A1= .23[illegible]E-04 A2= .72941311E-05 A3= -.27421658E-04 J= -8
A4= .00000000E 00 A5= .00000000E 00 A6= .00000000E 00
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
ETAC
θd
EI= .00000E 00 EOO= .30000E 02 EOMAX= .35000E 03

Fig 25 c

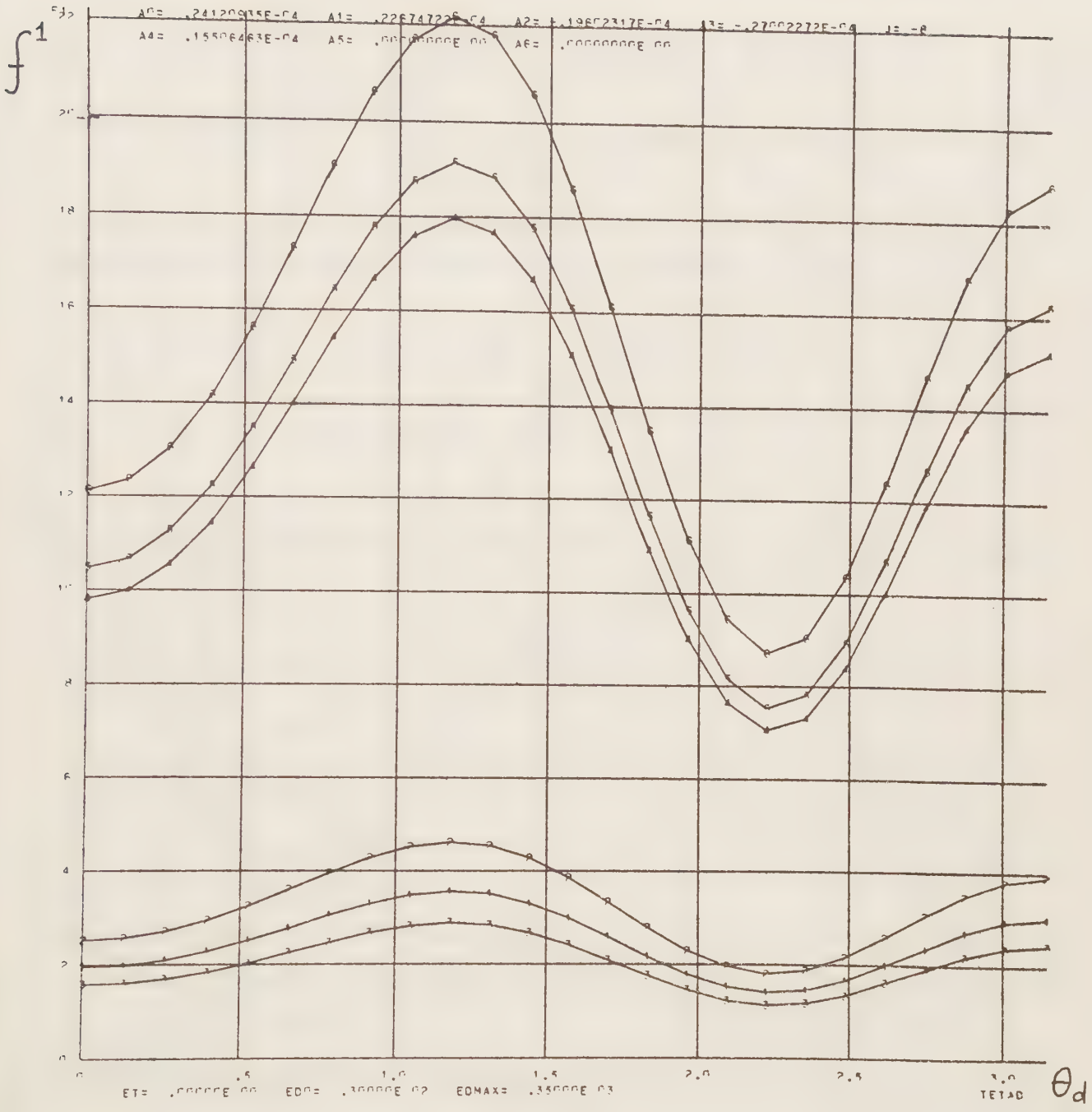

f1
A0= .24120015E-04 A1= .22674722E-04 A2= +.19602317E-04 A3= -.27002272E-04 A= -8
A4= .15506463E-04 A5= .00000000E 00 A6= .00000000E 00
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
ET= .000000E 00 EDO= .300000E 02 EDMAX= .350000E 03
TETAD
θd

Fig 25 d

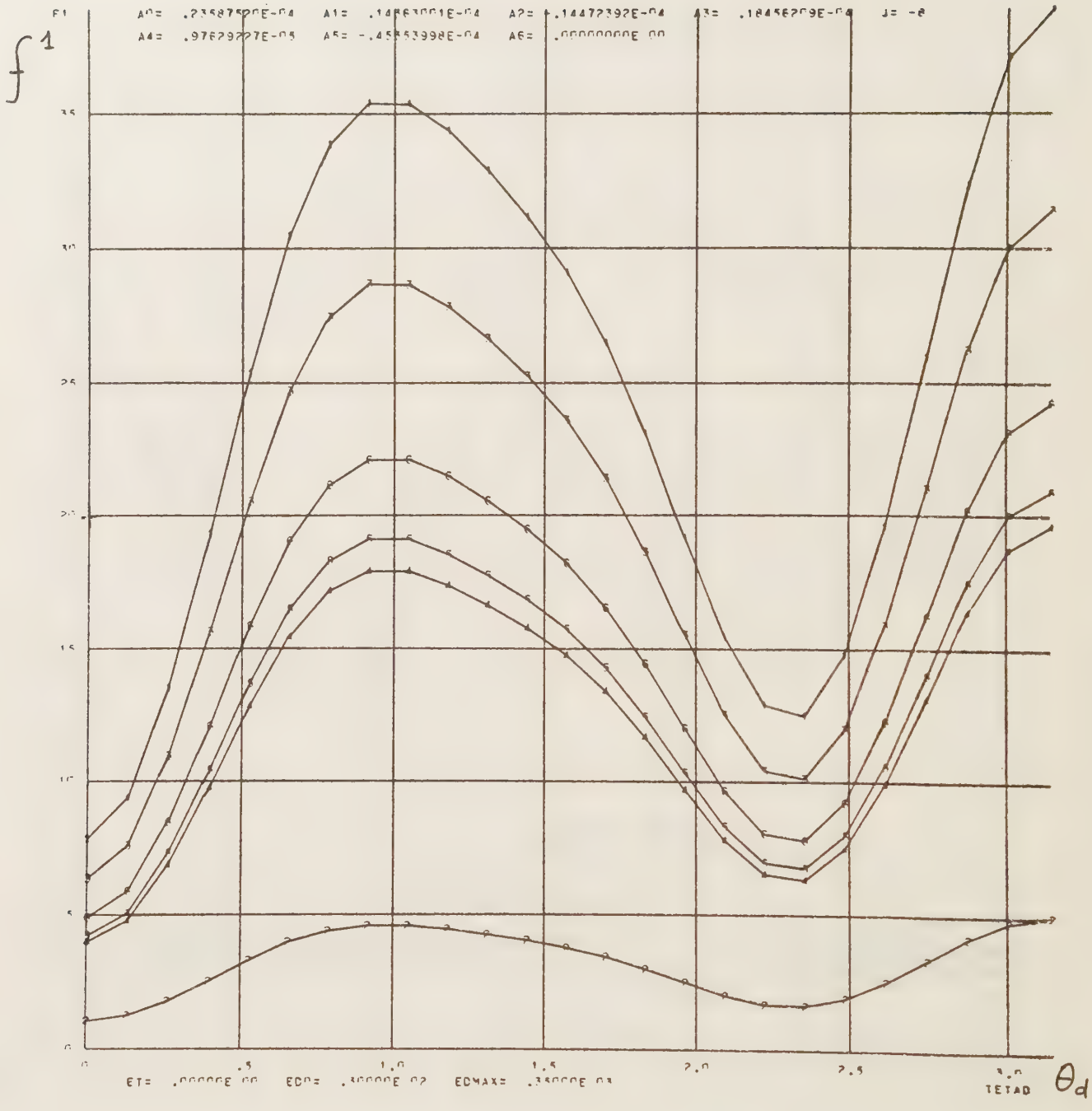

F1
A0= .23587500E-04
A1= .14863001E-04
A2= .14472392E-04
A3= .18456209E-04
A4= .97629227E-05
A5= -.45853998E-04
A6= .00000000E 00
1
ET= .00000E 00
EDP= .30000E 02
EDMAX= .35000E 02
TETAD
θd

Fig 25 e

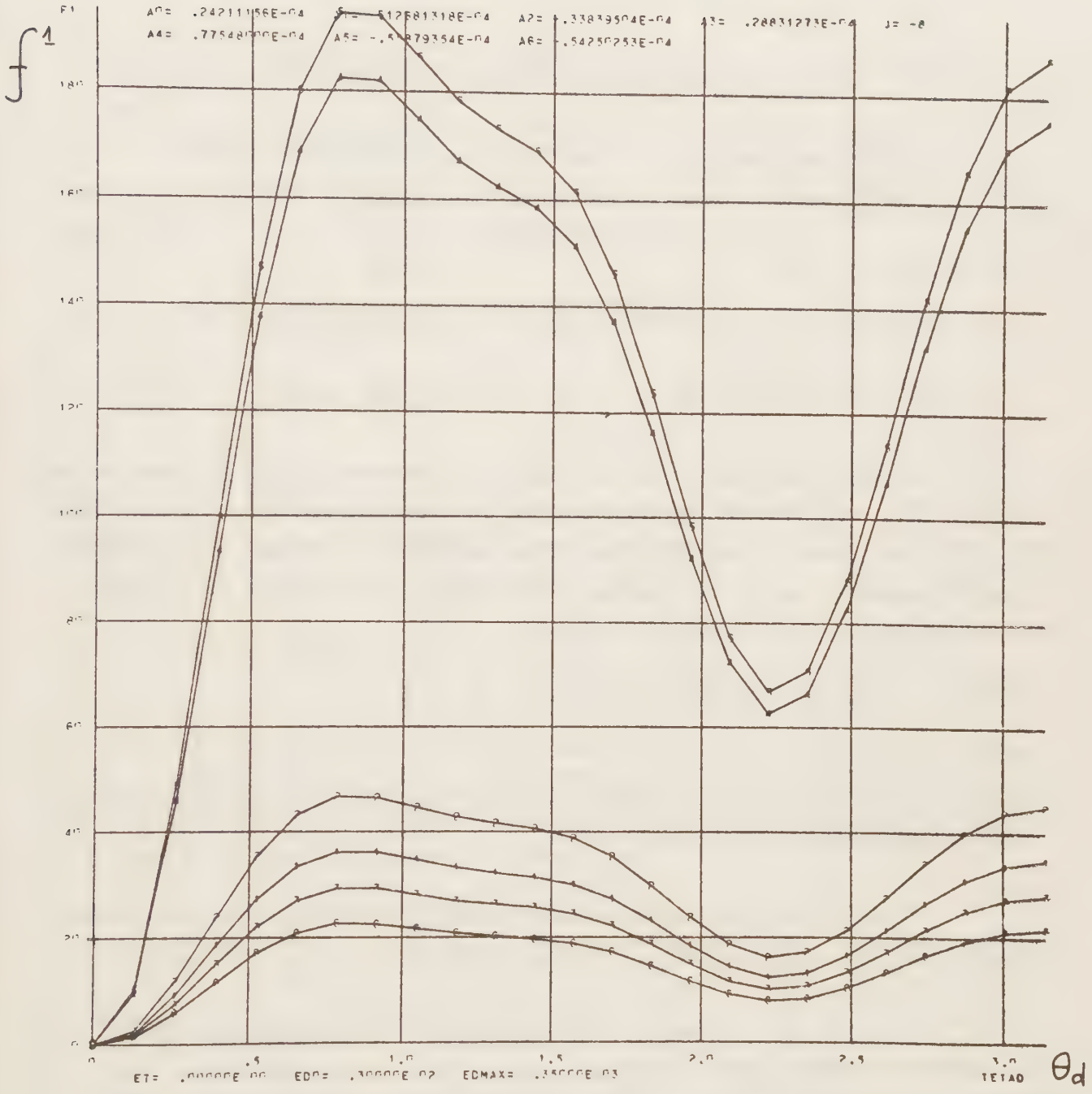


Fig 25 f

$i = 0, 1$	$\xi / \Sigma = 0{,}3049 \times 10^{-1}$
$i = 0, 1, 2$	$\xi / \Sigma = 0{,}2643 \times 10^{-1}$
$i = 0, 1, 2, 3$	$\xi / \Sigma = 0{,}1808 \times 10^{-1}$
$i = 0, 1, 2, 3, 4$	$\xi / \Sigma = 0{,}1739 \times 10^{-1}$
$i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$	$\xi / \Sigma = 0{,}1667 \times 10^{-1}$
$i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$	$\xi / \Sigma = 0{,}1658 \times 10^{-1}$

Le point important est le tracé de la courbe $f'(E_d, \theta_d)$ en fonction de θ_d à E_d constant. On fait le tracé d'un réseau pour E_d = 30, 50, 100, 200, 350, 600. Dans notre cas de variables séparées, le réseau n'a que peu d'intérêt, puisque toutes les courbes sont affinées entre elles. Si on prend une de ces courbes, on constate alors que :

- pour $i = 0, 1$ le maximum est situé à $\theta_d = 0$;
- pour $i = 0, 1, 2$ il y a un maximum très peu marqué pour $\theta_d = 1$;
- pour $i = 0, 1, 2, 3$ et les développements suivants, il y a un maximum très accentué pour θ_d voisin de 1.

A partir de 4 termes de développement nous mettons donc en évidence une distribution en angle dont le maximum se situe entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

A partir de 4 termes de développement la décroissance de ξ / Σ qui avait été rapide entre 2 et 3 et ensuite 3 et 4, devient faible, les courbes se déformant, sans que leurs caractéristiques essentielles évoluent : 2 maximums, 1 à $\theta_d = 1$, l'autre à $\theta_d = \pi$, deux minimums, l'un à $\theta_d = 0$, l'autre à $\theta_d = 2{,}2$ (fig. 25 a, b, c, d, e, f.).

Cela met bien en évidence l'inutilité de poursuivre le développement au-delà de 4 termes. La fourchette possible est donc constituée de 3 et 4 termes.

II.B.6.d. Calcul du flux, détermination de n_d et n_r.

Dans le cas de ce tir on disposait de la fonction $\frac{S_{f1}}{n_d n_r} = U_{f1}$ construite directement par lecture de la bande magnétique en formant la quantité $N^{-1} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}$, connaissant les $\alpha_{i,j}$

Il s'agit alors de réaliser l'intégrale

$$N^{-1} \int_{E^2}^{E^1} \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j} \right) dE = \frac{1}{n_d n_r} \Phi_{f1} (E_r, \theta_n)$$

Nous procédons alors, comme suit : nous prenons le flux à $\frac{\pi}{2}$ (donc le spectre à $\frac{\pi}{2}$) comme flux moyen et nous écrivons :

$$\Delta \mathcal{N} = 4\pi \Delta V \times \Delta t \times n_d n_r \times N^{-1} \int_{E^2}^{E^1} \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j} \left\{ 0, E, \frac{\pi}{2} \right\} \right) dE$$

Dans un premier temps nous réalisons une intégration manuelle, dans laquelle nous prenons de simples rectangles dont les ordonnées sont les points de la courbe et dont les bases sont de 100 keV.

$$N^{-1} \int_{E^2}^{E^1} \left[\sum \alpha_{i,j} U_{i,j} \left(0, E, \frac{\pi}{2} \right) \right] dE = \Delta E \times \sum_{E=2000}^{E=3200} \left[N^{-1} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j} \left(0, E, \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\frac{\Phi\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{n_d n_r} = 100 \times 10^{-35} \times 107,19$$

$$\Phi\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1,07 \times 10^{-31} \times n_d n_r$$

Le calcul se poursuit de la manière suivante, nous connaissons le nombre de neutrons mesuré expérimentalement

$$\Delta N = 1,66 \times 10^{10}$$

$$\Delta t = 0,1 \ \mu s$$

nous estimons à 50 cm3 le volume de la bulle :

$$\Delta V = 50 \times 10^{-6} \ m^3$$

n_T est estimé en remarquant que la pression dans la bulle est égale à la pression de remplissage. 1 torr correspond à 7×10^{16} deutérons x cm^{-3} soit 7×10^{22} m^{-3} ; pour 17 torr

$$n_T = 119 \times 10^{22} \text{ deutérons/m3}$$

on en déduit :

$$n_d = \frac{1,66}{1,07 \times 119 \times 5 \times 12,56} \times 10^{19} \quad D \times cm^{-3}$$

$$n_d \# 2 \times 10^{15}$$

Si on compare n_d à n_T

$$\frac{n_T}{n_d} \simeq \frac{1,2 \times 10^{18}}{0,2 \times 10^{16}} = 600$$

Ce rapport, même s'il nous paraît un peu élevé (100 conviendrait mieux), aboutit à :

$$n_d \Delta V \simeq 50 \times 2 \times 10^{15} = 10^{17}$$

10^{17} deutérons accélérés dans le filament, c'est bien un chiffre de l'ordre de grandeur du nombre de particules que les expérimentateurs trouvent dans le filament (2×10^{17}).

ΔV étant fixé, ainsi que Δt, n_π, la quantité qui peut évoluer dans la détermination de n_d c'est :

$$\Delta V \times N^{-1} \times \int_{E^2}^{E^1} \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j} \right) dE$$

et en définitive :

$$\Delta V \times N^{-1} \times \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}$$

ce que nous pouvons encore écrire :

$$\Delta V \times \frac{S_{f^1}}{n_d n_\pi} = \Delta V \times U_{f^1}$$

Or cette quantité dépend fondamentalement de E_d^2 et de ΔV. Nous voyons réapparaître l'espace que nous avons supprimé en parlant de moyenne.

Des considérations développées par les expérimentateurs sur la taille de la bulle, il ressort que l'énergie de 10 keV correspond au 10^8 cm/s qui représente la vitesse du front d'ionisation. Or 10 keV, cela correspond aussi en 100 ns soit 0,1 μs à un parcours de 10 cm. On retrouve l'ordre de grandeur des dimensions proposées pour la bulle.

En définitive, nous pouvons faire les remarques suivantes :

$$\Delta V \quad \alpha \quad \left(E_d^1\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$U_{i,j} \quad = \quad \int_{E_d^2}^{E_d^1} \sigma_\pi E_d^{\frac{j+1}{2}} k\left(E_d\right) dE_d$$

où k est une fonction faiblement variable en fonction de E_d.

$\sigma_\pi E_d^{\frac{j+1}{2}}$ On a vu que pour $j = -12$, $j = -8$ le maximum de la courbe se situe respectivement à 26 keV (1,62 x 10^8 cm/s) et à 85 keV (2,92 x 10^8 cm/s). Si on prend $j = -6$, on trouve 240 keV soit près de 5 x 10^8 cm/s. Donc pour $j = -6$, -8 l'intégrale varie peu quand E_d^2 varie de 10 à 30 keV soit de 10^8 cm/s à 1,7 x 10^8 cm/s (fig. 22).

$$N^{-1} \quad \alpha \quad \left(E_d^2\right)^{-\frac{3+j}{2}}$$

$$j = -8 \qquad N^{-1} \quad \alpha \quad \left(E_d^2\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$j = -6 \qquad N^{-1} \quad \alpha \quad \left(E_d^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

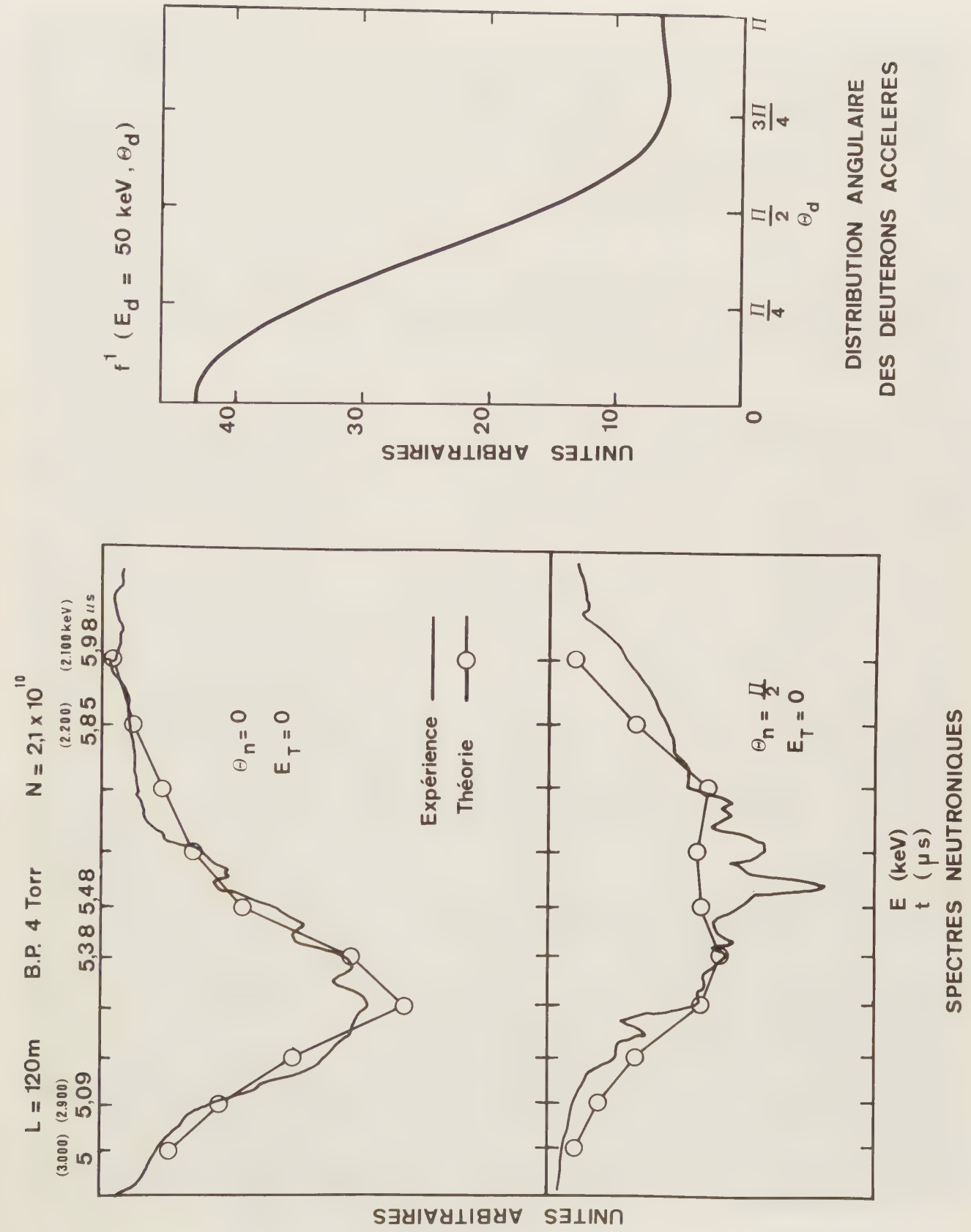


Fig. 26 : Dépouillement du tir n° 1 687

Pour les 2 valeurs de j , l'expression varie donc comme :

$$N^{-1}\,\Delta V \qquad \alpha \quad \left(E_d^2\right)^{-\frac{j}{2}}$$

l'influence de E_d^2 est donc d'autant plus faible que $-\frac{j}{2}$ est plus petit. Il faut s'orienter vers l'utilisation de valeurs de j aussi grandes que possible (en excluant 0) ($|j|$ petit).

En conclusion E_d^2 devra être choisi de façon à ce que $n_d \Delta V$ soit de l'ordre de 10^{17}. Cela pourrait nous permettre également d'avoir un ordre de grandeur de ΔV .

II.C. Autre exemple de dépouillement.

II.C.1. Présentation du tir.

C'est le tir portant le n° 1687, dont on peut voir la figure ci-contre (figure 26). Le spectre à $\theta_n = 0$ a subi un décalage en retard de 100 ns, le spectre à $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ a subi un décalage en avance de 100 ns.
C'est un tir effectué sous pression de 4 torr et qui a produit 2,1 x 10^{10} neutrons.

II.C.2. Résultats et discussion.

En prenant $E_d^2 = 30$ $E_d^1 = 350$ $E_\tau = 0$ $j = -8$ on a obtenu les résultats suivants :

Avec un simple décalage-retard pour $\theta_n = 0$ de 100 ns, et aucun décalage à $\frac{\pi}{2}$.

i = 0, 1, 2, 3	ξ/Σ	= 0,3842 x 10^{-1}	
i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	ξ/Σ	= 0,2737 x 10^{-1}	$f^1(2,49)<0$
i = 0, 1, 2, 3	ξ/Σ	= 0,2638 x 10^{-1}	
i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	ξ/Σ	= 0,1522 x 10^{-1}	$f^1(2,49)<0$

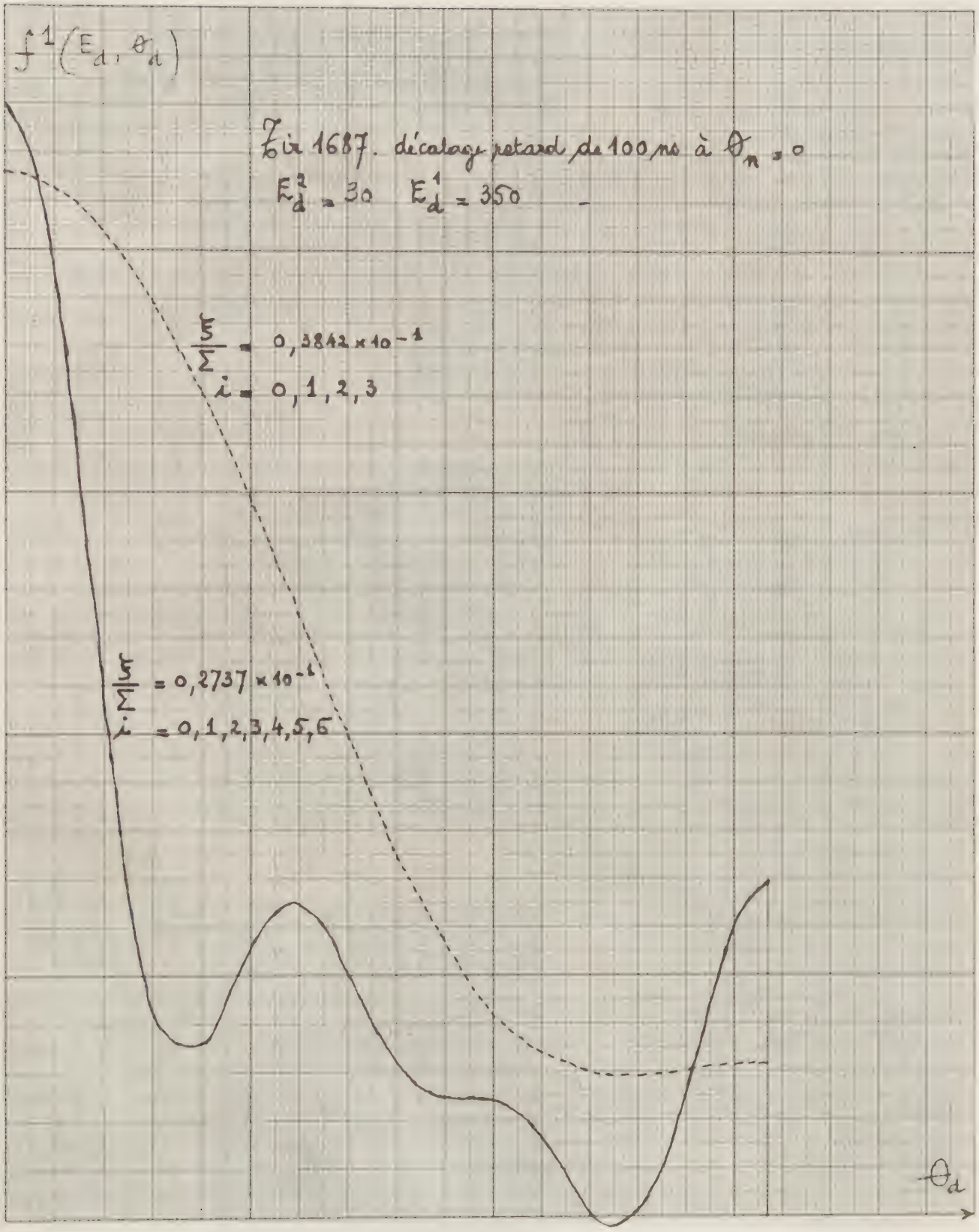


Fig. 27a : Tir 1687 - f^1 pour 4 termes et 7 termes en i

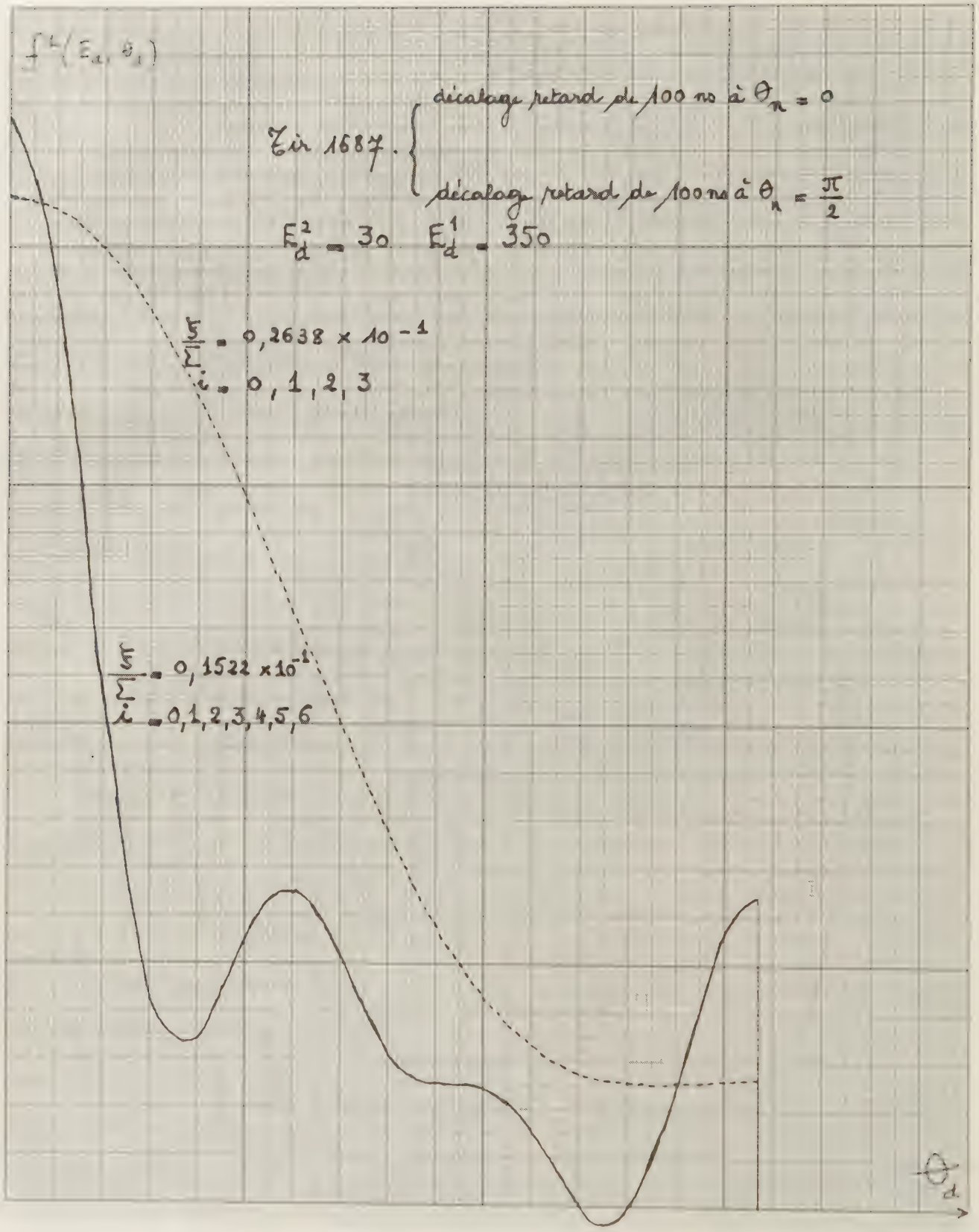


Fig. 27b : Tir 1687 - $\int^1$ pour 4 termes et 7 termes en i

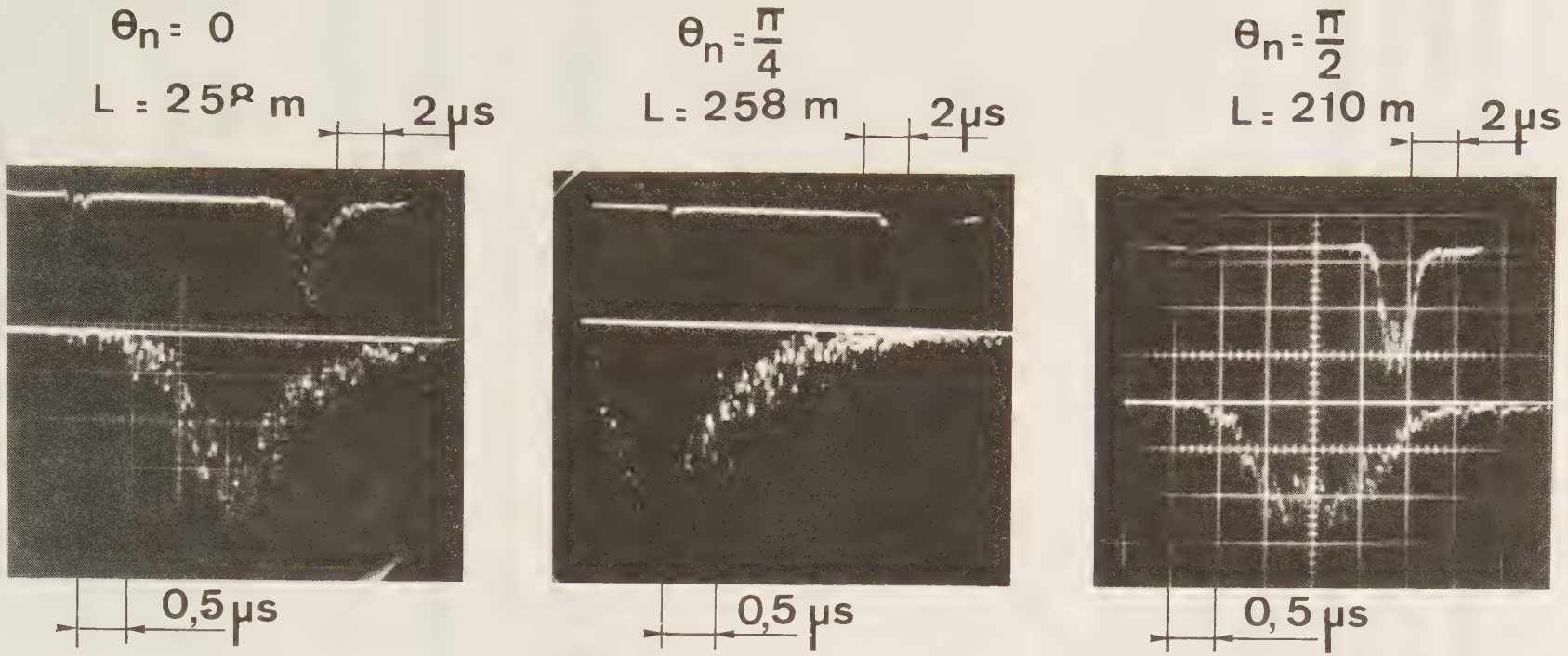


Fig. 28 : Oscillosgrammes du tir n° 257 effectué à MORONVILLIERS

Ce deuxième tir ayant été choisi en raison de la forme arrondie du spectre à $\frac{\pi}{2}$, aboutit donc, après décalages, à des résultats très analogues à celui du tir 2040, qui, à priori, se rapprochait beaucoup plus des formes dont les spectres de notre modèle paraissaient susceptibles de rendre compte (fig. 27 a, b).

II.C.3. Flux.

Nous redonnons ici le même calcul de flux que précédemment.

$$\Phi\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}05 \times 10^{-31}$$

$$n_\pi = 2{,}8 \times 10^{17}\ D/cm^3$$

$$\Delta N = 2{,}1 \times 10^{10}$$

$$\Delta V = 50\ cm^3$$

$$n_d \# \frac{2 \times 10^{19}}{28 \times 5 \times 12{,}56} = 1{,}14 \times 10^{16}\ D/cm^3$$

$$n_d \Delta V = 5{,}5 \times 10^{17}$$

III. DEPOUILLEMENT DES COURBES EXPERIMENTALES POUR 3 DIRECTIONS (CAMPAGNE DE MORONVILLIERS).

III.A. Présentation des résultats expérimentaux sur un tir particulier.

Ce tir est le tir n° 257 effectué à MORONVILLIERS avec trois directions d'observation : 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$. (fig. 28).

Les trois spectres se présentent comme remarquablement en phase, au départ (3,30 MeV) ce qui correspond toujours à une énergie de 350 keV.

Le pouvoir de résolution en énergie, puisque les distances ont doublé, se situe aux alentours de 50 keV. Cependant l'erreur commise à la lecture reste toujours de l'ordre de 100 keV, donc de 200 ns. En effet l'échelle des temps s'étale maintenant sur 10 µs, ceci pour un même nombre de carreaux du scope, on ne peut donc voir maintenant que 200 ns au lieu de

100. C'est pourquoi nous ferons la lecture avec une échelle linéaire en énergie graduée de 100 keV en 100 keV.

Ce tir a été effectué sous une pression de 15 torr.

Pour le dépouiller, nous avons procédé à des étalonnages des différentes chaînes de mesure (scintillateur + PM dans les trois directions), qui nous ont donné les résultats suivants :

$$\frac{g(0)}{g\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 0,67$$

$$\frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1,02$$

Ces valeurs ont été obtenues par intégration sur les différentes courbes affines obtenues à partir d'un même signal neutronique. Pour 0 et $\frac{\pi}{4}$, les tensions des PM étaient rigoureusement ajustées par différence. Pour $\frac{\pi}{2}$, la tension était maintenue nominativement égale aux deux précédentes.

III.B. Dépouillement des résultats expérimentaux sur un tir particulier.

III.B.1. Choix de E_d^1

Comme nous l'avons remarqué précédemment E^1 ayant la valeur 3,30 MeV, nous avons pris E_d^1 = 350 keV. Nous rappelons que, contrairement aux apparences, la détermination de ce point est médiocre : seuil du PM, forte atténuation correspondant à un fort relèvement des points de cette zone, quand on calcule S_M^o.

III.B.2. Choix de E_d^2

Nous avons conservé la valeur 30 keV précédemment utilisée.

III.B.3. Choix de j

Nous avons essayé successivement $j = -8$ et $j = -6$. L'ajustement des pentes particulièrement avec $\theta_n = 0$ est meilleur pour $j = -6$.

III.B.4. Choix du nombre de i

Nous avons continué avec $i = 0, 1, 2, 3$ nombre de valeurs minimum requis pour le dépouillement de 3 directions.

III.B.5. Choix de E_π

Comme précédemment, tout le travail préliminaire s'est effectué à $E_\pi = 0$.

III.C. Résultats et courbes sur un tir particulier.

III.C.1. Choix des paramètres de dépouillement

Ces paramètres sont tout d'abord :

$E_d^2 = 30$ $\quad E_d^1 = 350$ $\quad E_\pi = 0$ $\quad j = -6$ $\quad i = 0, 1, 2, 3.$

mais il faut ensuite donner tous les paramètres correspondant aux étalonnages, nous avons alors pris les valeurs suivantes :

$g(0) = 0,67$ $\quad g(\frac{\pi}{4}) = 1$ $\quad g(\frac{\pi}{2}) = 0,8$

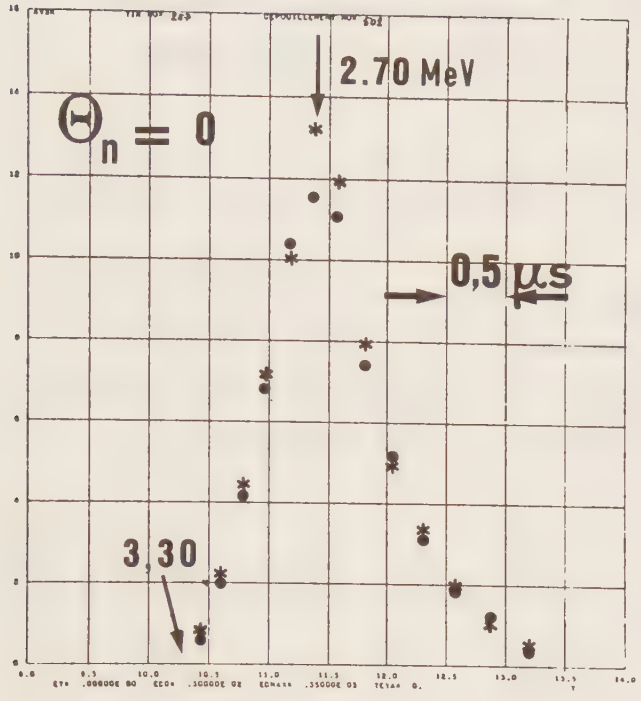
$\delta(0) = 0,2$ $\quad \delta(\frac{\pi}{4}) = 0,2$ $\quad \delta(\frac{\pi}{2}) = 0,5$ en V/cm.

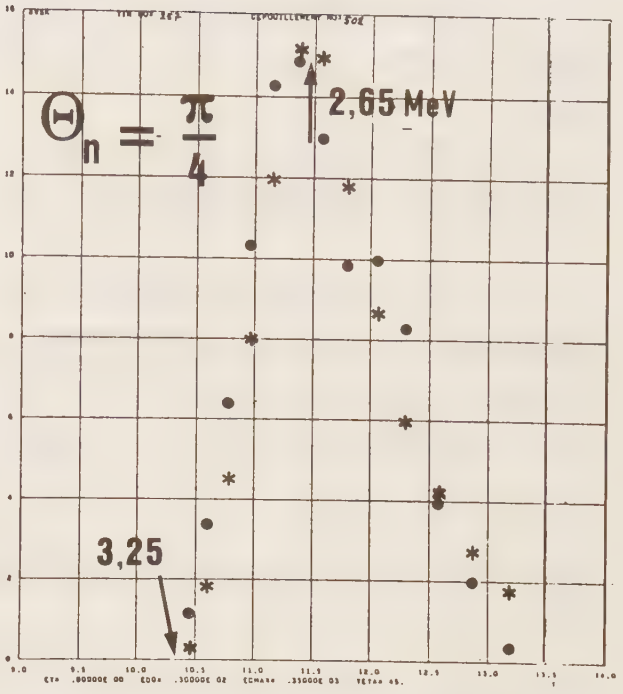
Remarquons, que, pour $g(\frac{\pi}{2})$ étant donné sa mauvaise détermination, nous l'avons ajusté de façon à obtenir le Ξ/Σ minimum.

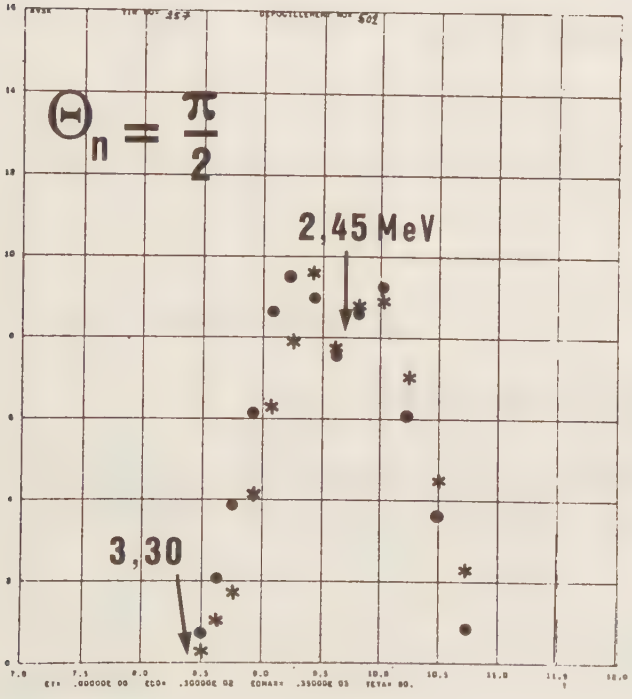
Enfin pour augmenter la qualité de l'ajustement, nous avons procédé à un calage temporel. Nous avons effectué un décalage-retard de 200 ns à $\theta_n = 0$.

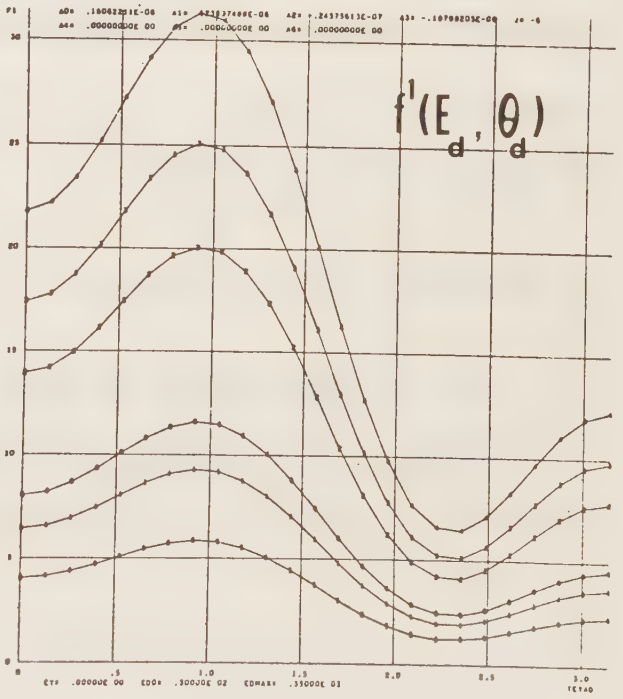
15 Torr 120 kJ 40 kV

$L(0) = 258{,}2$ m $L(\frac{\pi}{4}) = 258{,}2$ m $L(\frac{\pi}{2}) = 210{,}2$ m









EDO = 30 keV EDMAX = 350 keV ET = 0 keV

Fig.29 : $f^1(E_d, \theta_d) = k E_d^{-3} h(\cos \theta_d)$

Nous avons essayé d'insister sur le lissage préalable des courbes expérimentales, lissage rendu plus délicat dans ce cas par un bruit assez important.

II.C.2. Résultats obtenus.

Ils sont représentés sur la figure 29 ci-contre où les astérisques représentent les points expérimentaux et les points, les points théoriques. On prend le temps en abscisse. Les correspondances en énergie ont été indiquées pour les points essentiels. Le réseau des courbes f^1 qui s'écrivent :

$$f^1(E_d, \theta_d) = N^{-1} E_d^{-3} (0{,}1606 + 0{,}2360 \cos\theta_d - 0{,}0246 \cos^2\theta_d - 0{,}1980 \cos^3\theta_d) \times 10^{-6}$$

a été tracé pour $E_d = 30, 50, 100, 200, 350, 600$.

Les échelles sont relatives et les courbes sont affines.

On obtient :

$$\xi / \Sigma = 0{,}2891 \times 10^{-1}$$

soit une erreur relative constante de l'ordre de 17 %.

III.C.3. Discussion de la valeur de E_d^2, j, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Un essai de dépouillement a été réalisé sans décalage de $\theta_n = 0$, en prenant 100 keV pour E_d^2, on a obtenu un résultat mauvais :

$$\xi / \Sigma = 0{,}1266$$

Pour $j = -8$, $E_d^2 = 30$, $E_d^1 = 350$, $E_r = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, le dépouillement avec un décalage-retard de 200 ns pour $\theta_n = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}8$, a donné :

$$\xi / \Sigma = 0,5683 \times 10^{-1}$$

L'amélioration est très sensible pour $j = -6$, comme le prouve le résultat du paragraphe III.C.2. Enfin pour $j = -8$, on a étudié ξ / Σ pour diverses valeurs de $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\xi / \Sigma = 0,6334 \times 10^{-1}$
$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,9$	$\xi / \Sigma = 0,5854 \times 10^{-1}$
$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,8$	$\xi / \Sigma = 0,5683 \times 10^{-1}$
$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,7$	$\xi / \Sigma = 0,6249 \times 10^{-1}$
$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,6$	$\xi / \Sigma = 0,7752 \times 10^{-1}$

La valeur de g semble satisfaisante, puisqu'elle ne s'écarte pas trop sensiblement de 1 et qu'elle correspond à une nette amélioration par rapport à 0,6 par exemple.

III.D. Autres résultats.

Nous avons procédé au dépouillement de trois autres tirs particulièrement caractéristiques. Ces tirs exécutés à MORONVILLIERS portaient respectivement les n° 236, 260, 264.

Tir 236 10 torr ;

Tir 260 15 torr ;

Tir 264 15 torr.

III.D.1. Résultats obtenus.

Les valeurs des paramètres sont :

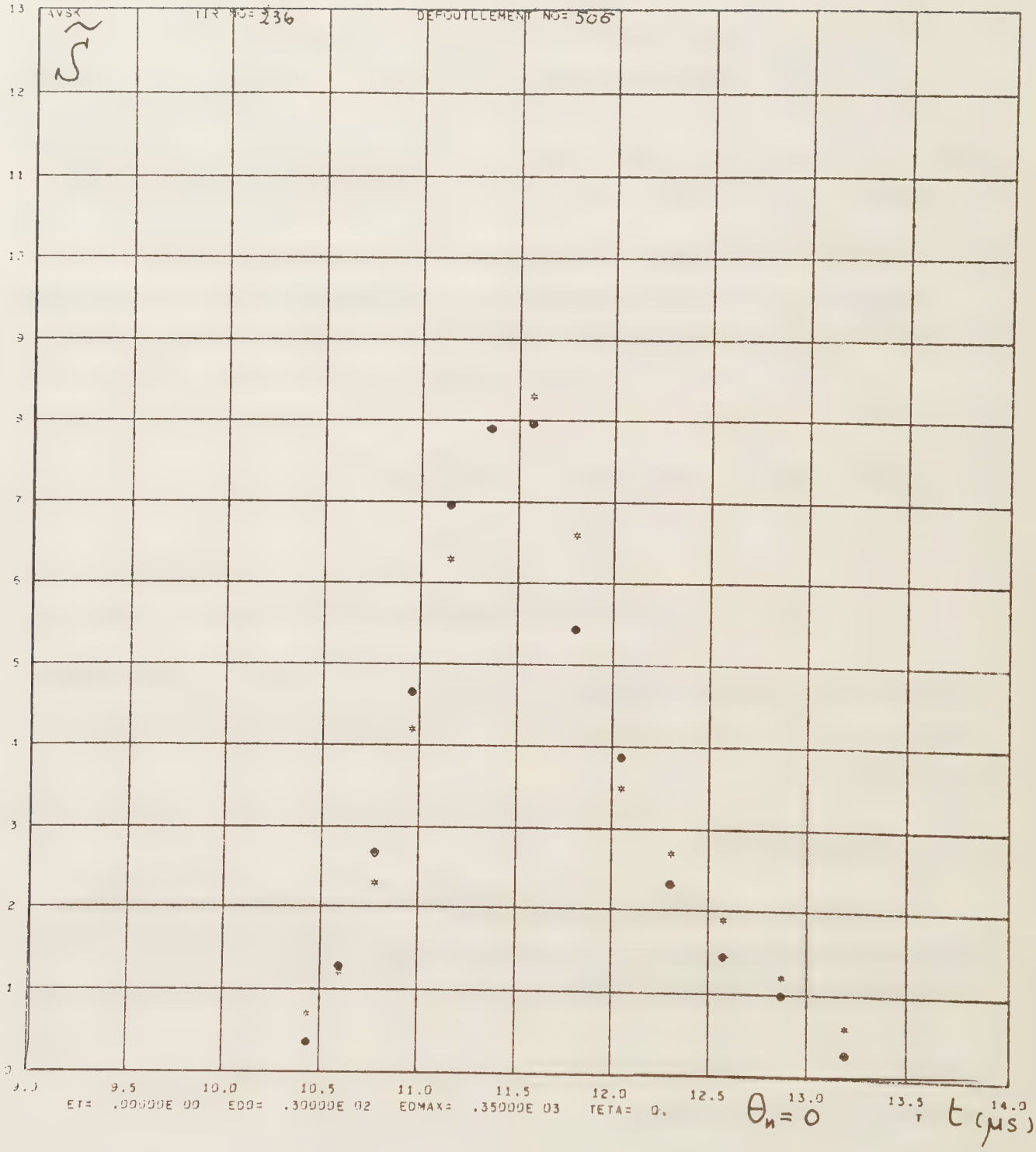


Fig. 30 a : ✳ Points expérimentaux

● Points théoriques

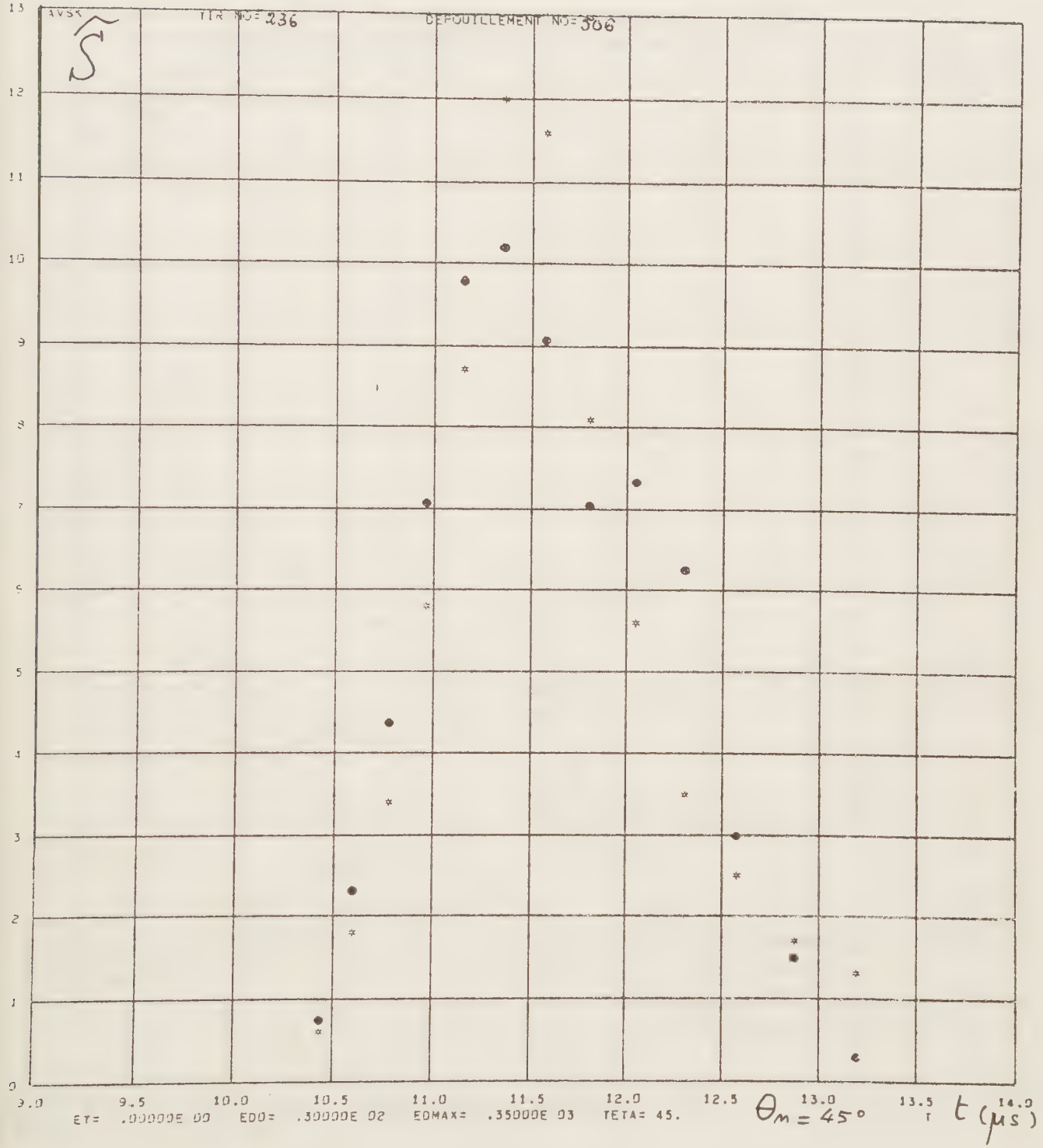


Fig. 30 b : ✱ Points expérimentaux

● Points théoriques

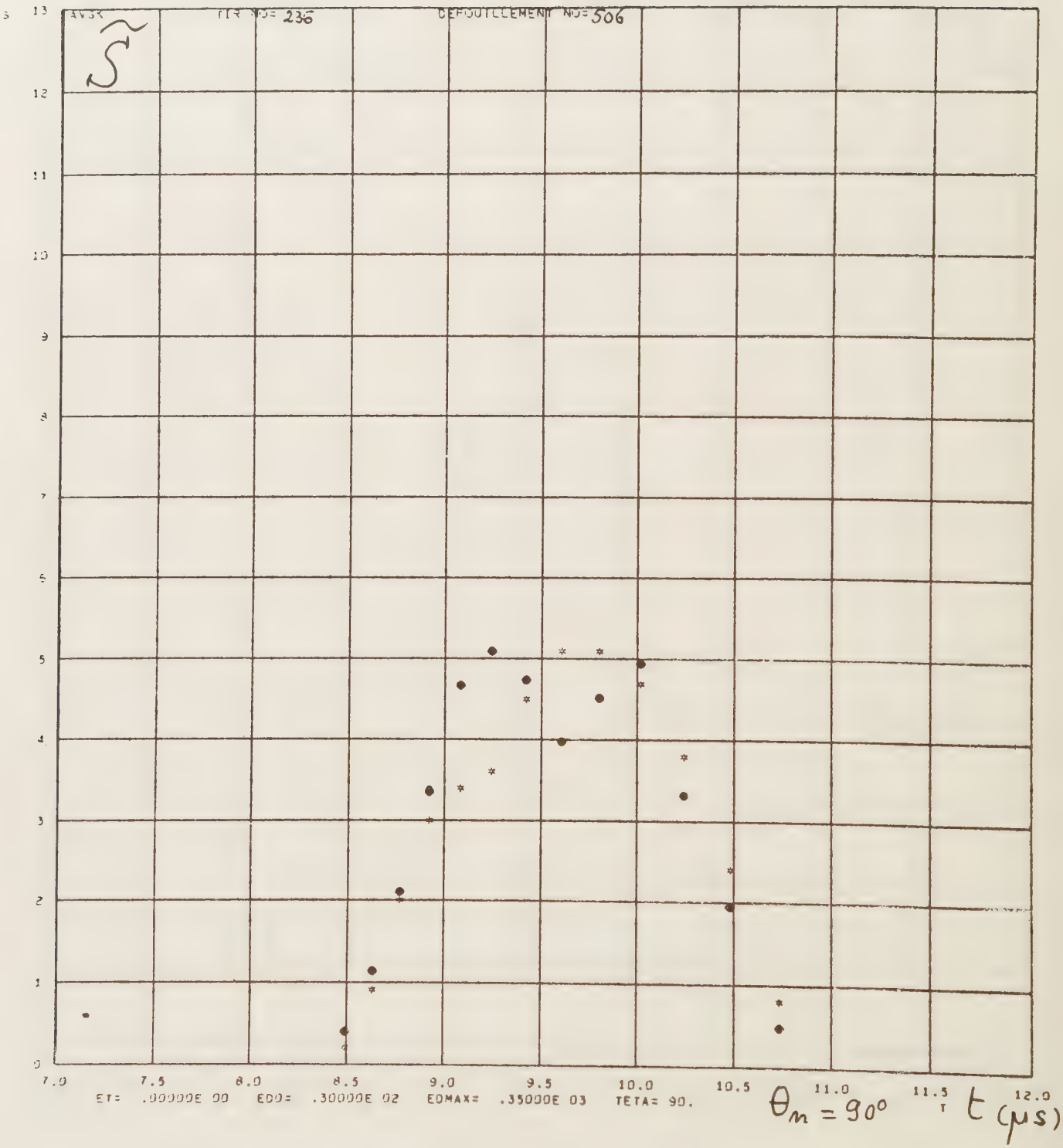


Fig. 30 c : ✳ Points expérimentaux

● Points théoriques

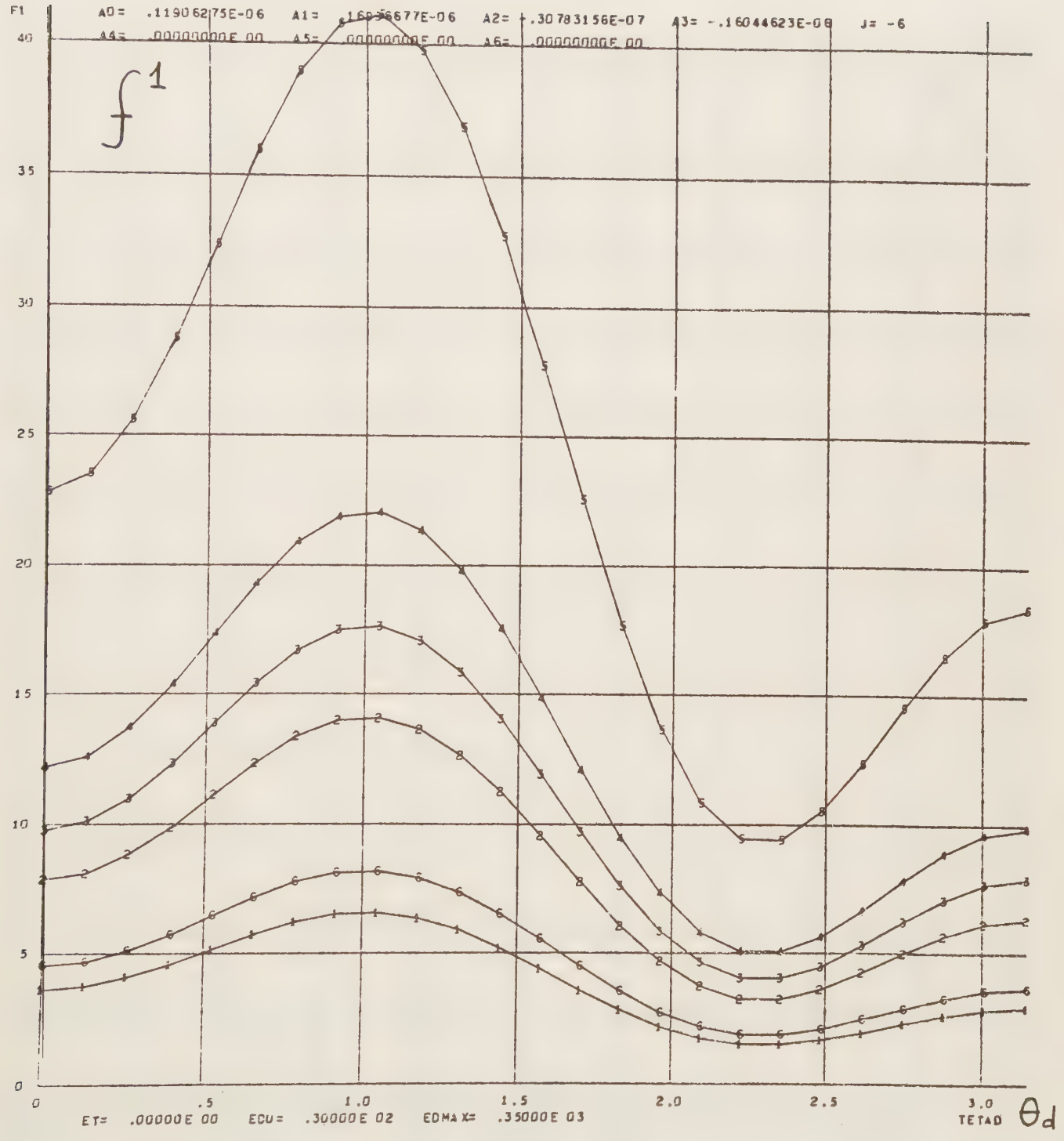


Fig. 30 d : Courbes $\int^1$

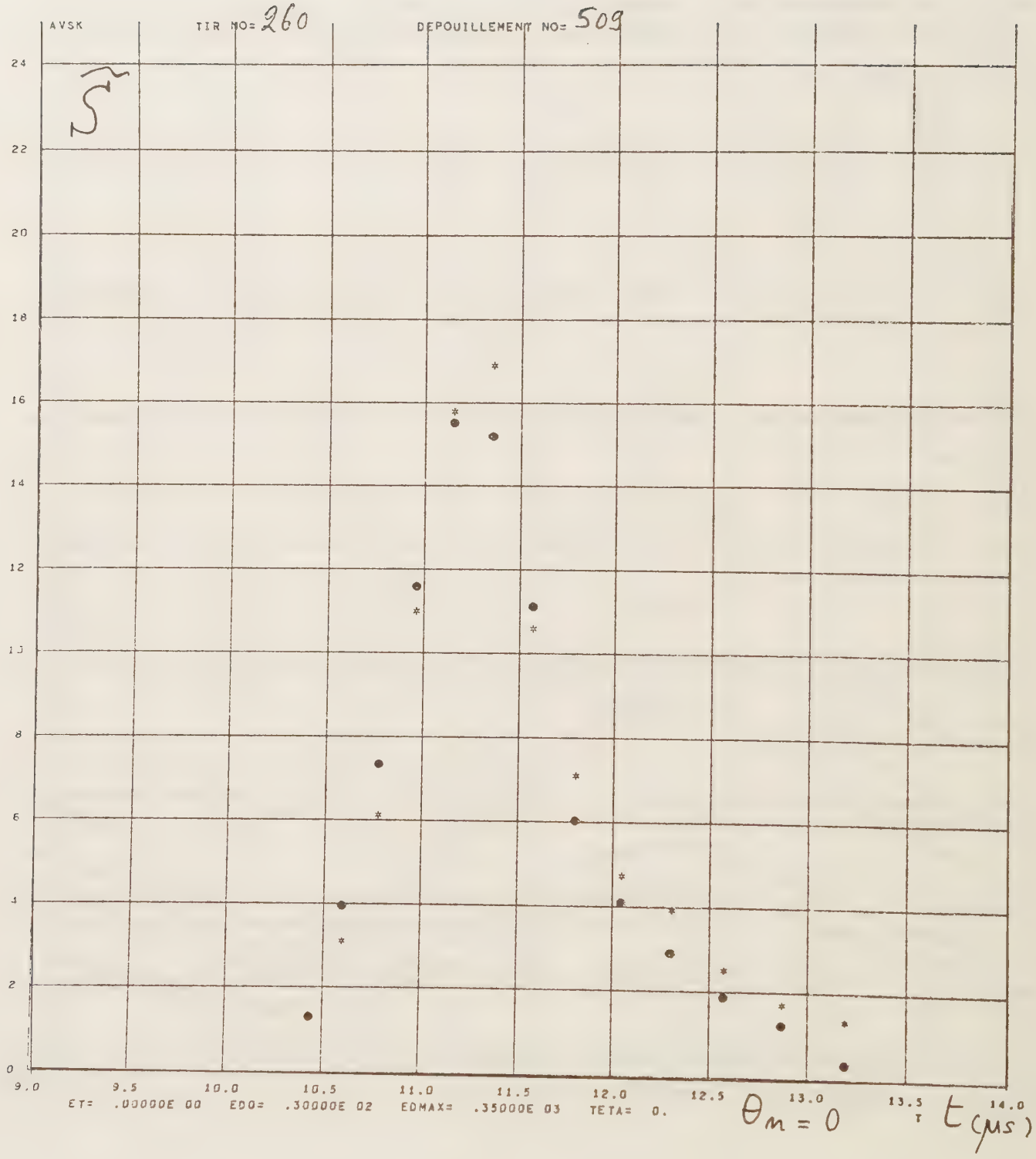


Fig. 31a : ✳ Points expérimentaux
● Points théoriques

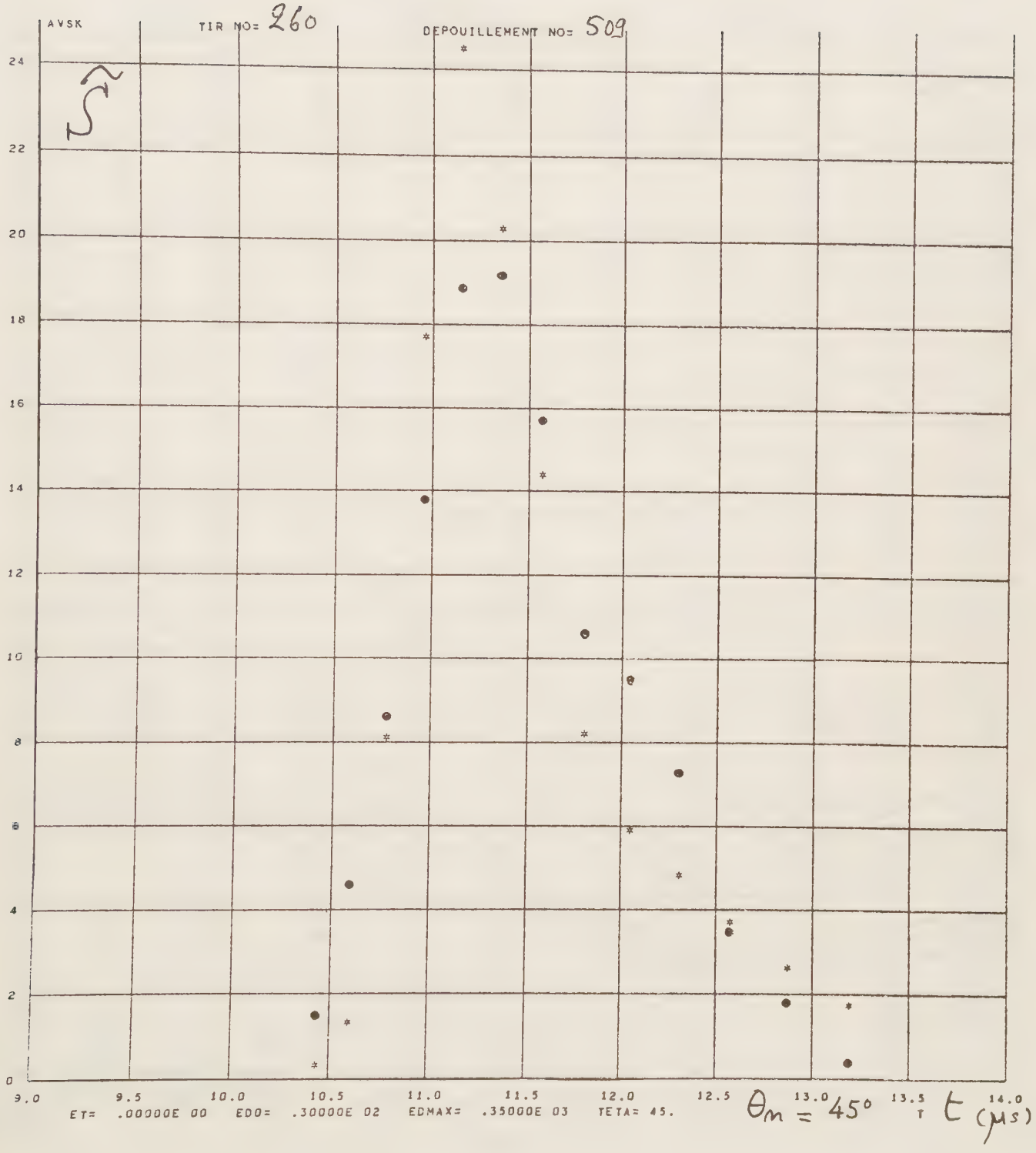


Fig.31 b : ✳ Points expérimentaux
● Points théoriques

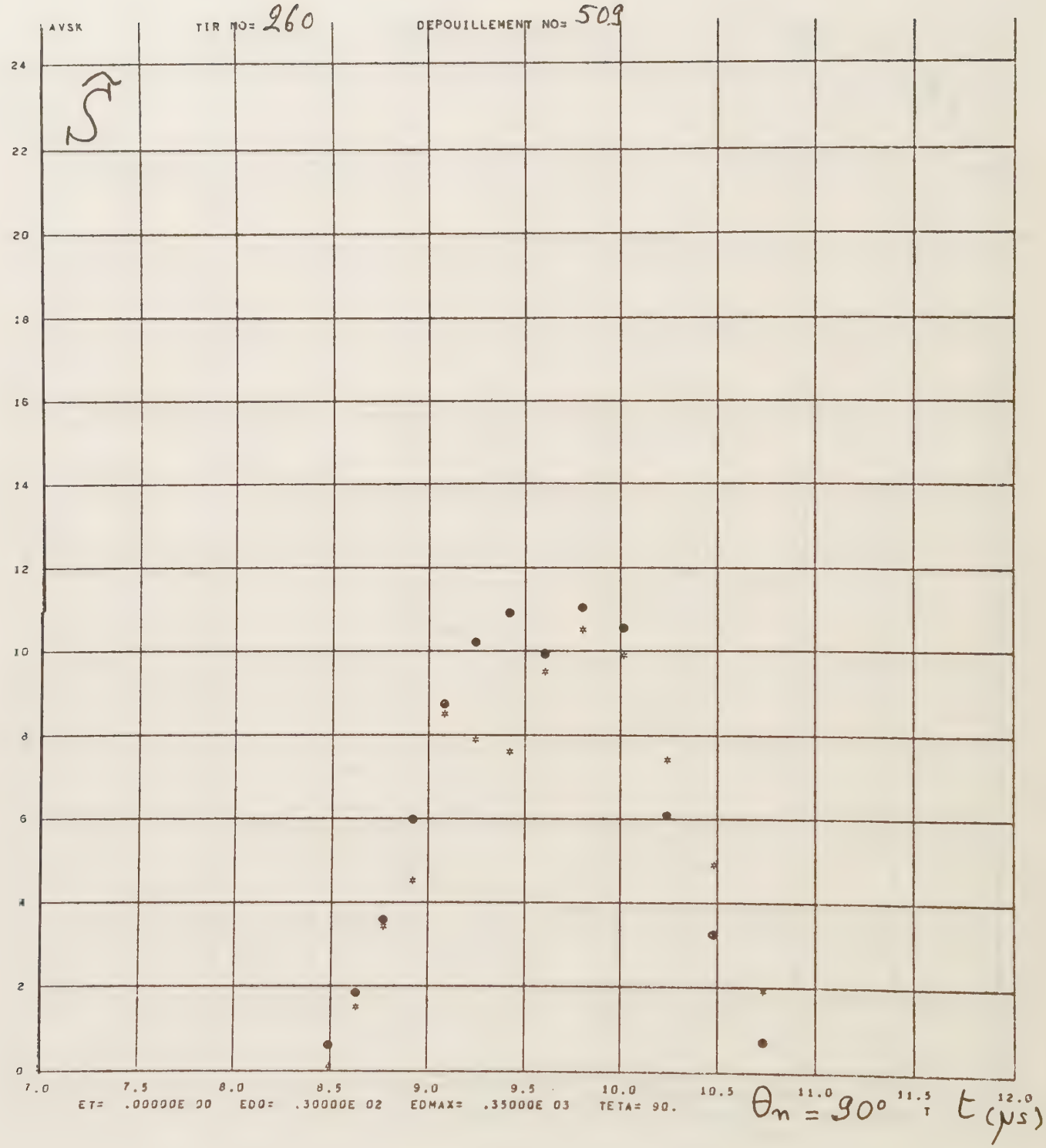


Fig. 31 c : ✳ Points expérimentaux
● Points théoriques

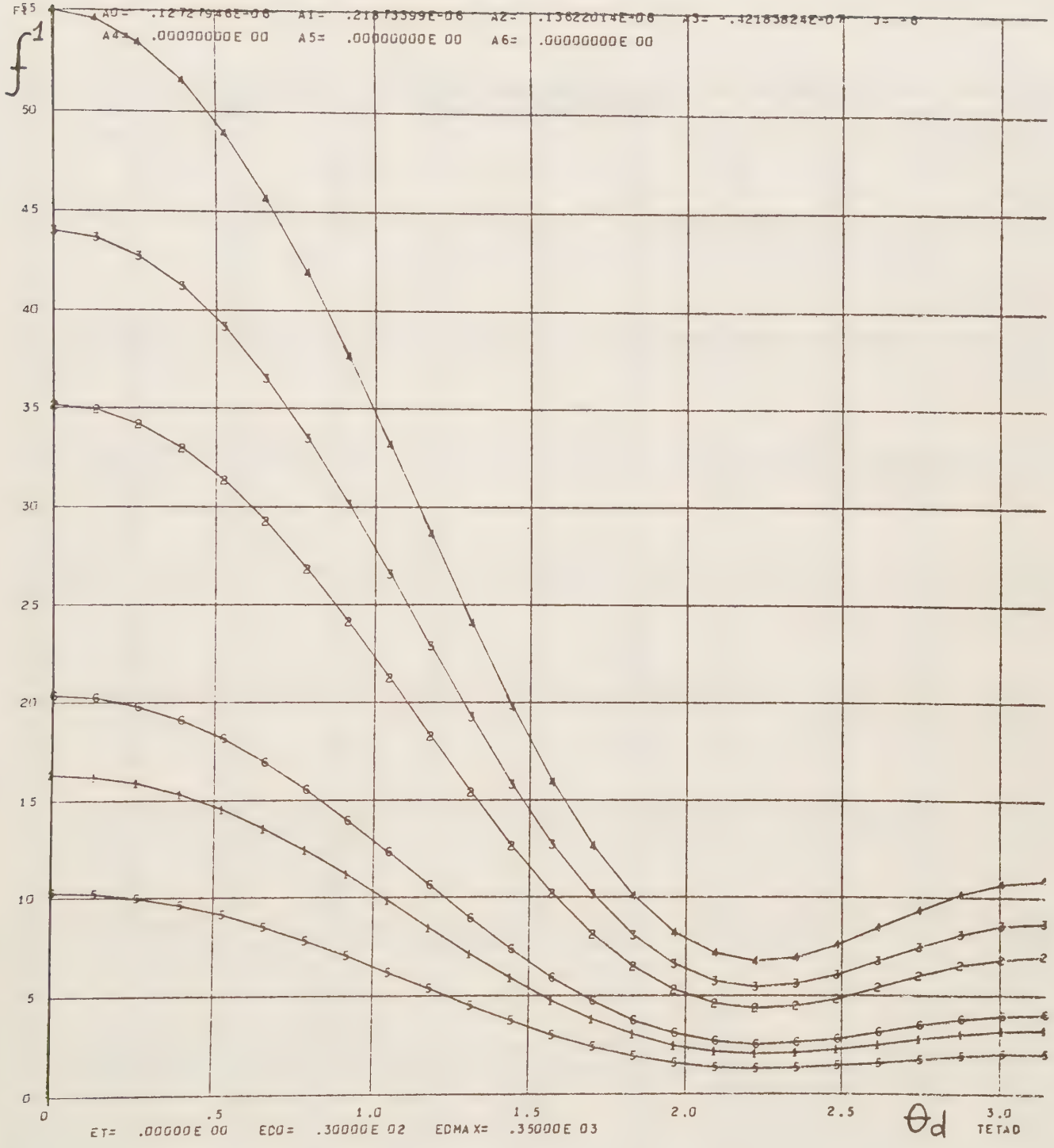


Fig. 31 d : Courbes f^1

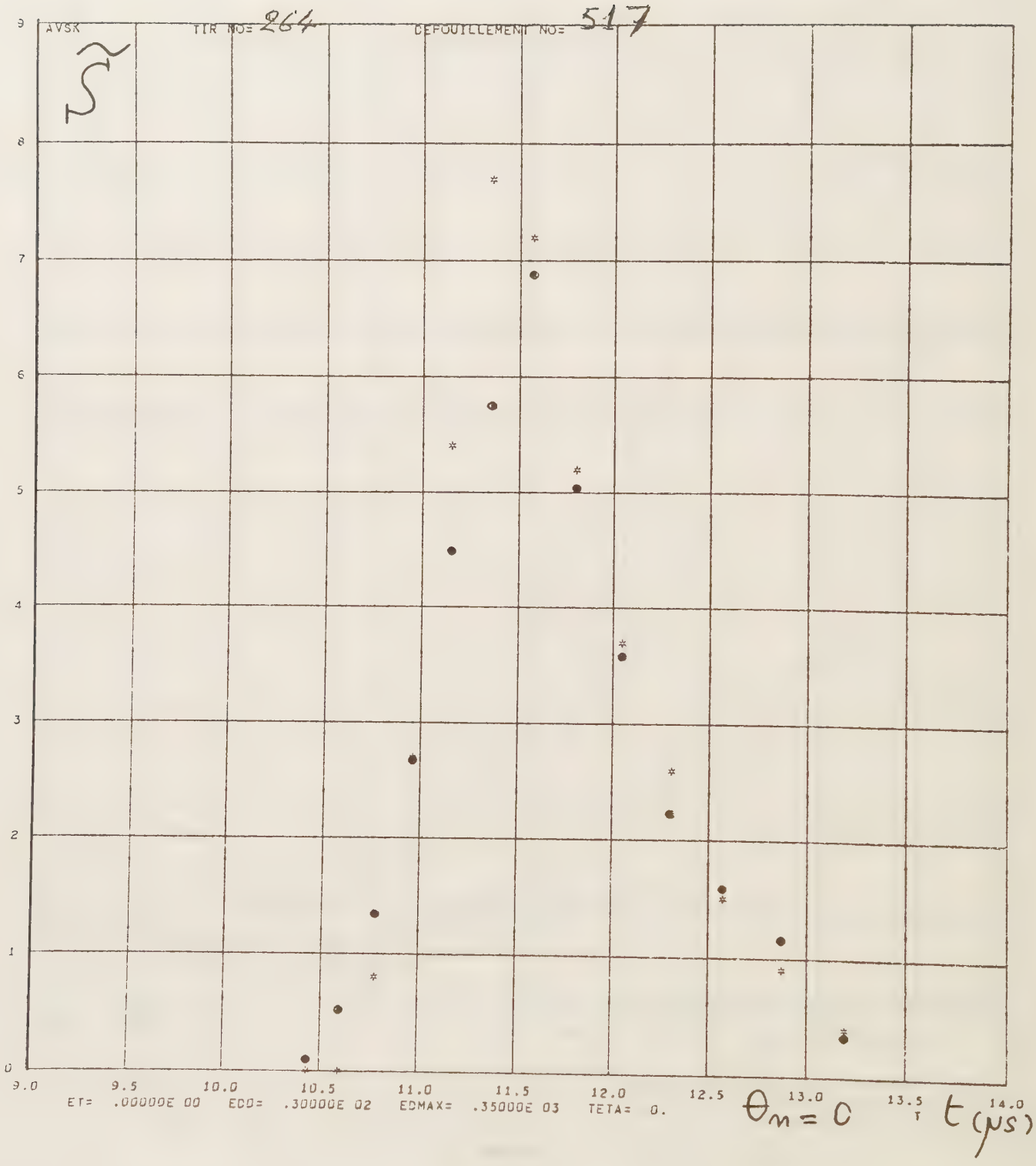


Fig. 32 a : ✳ Points expérimentaux
● Points théoriques

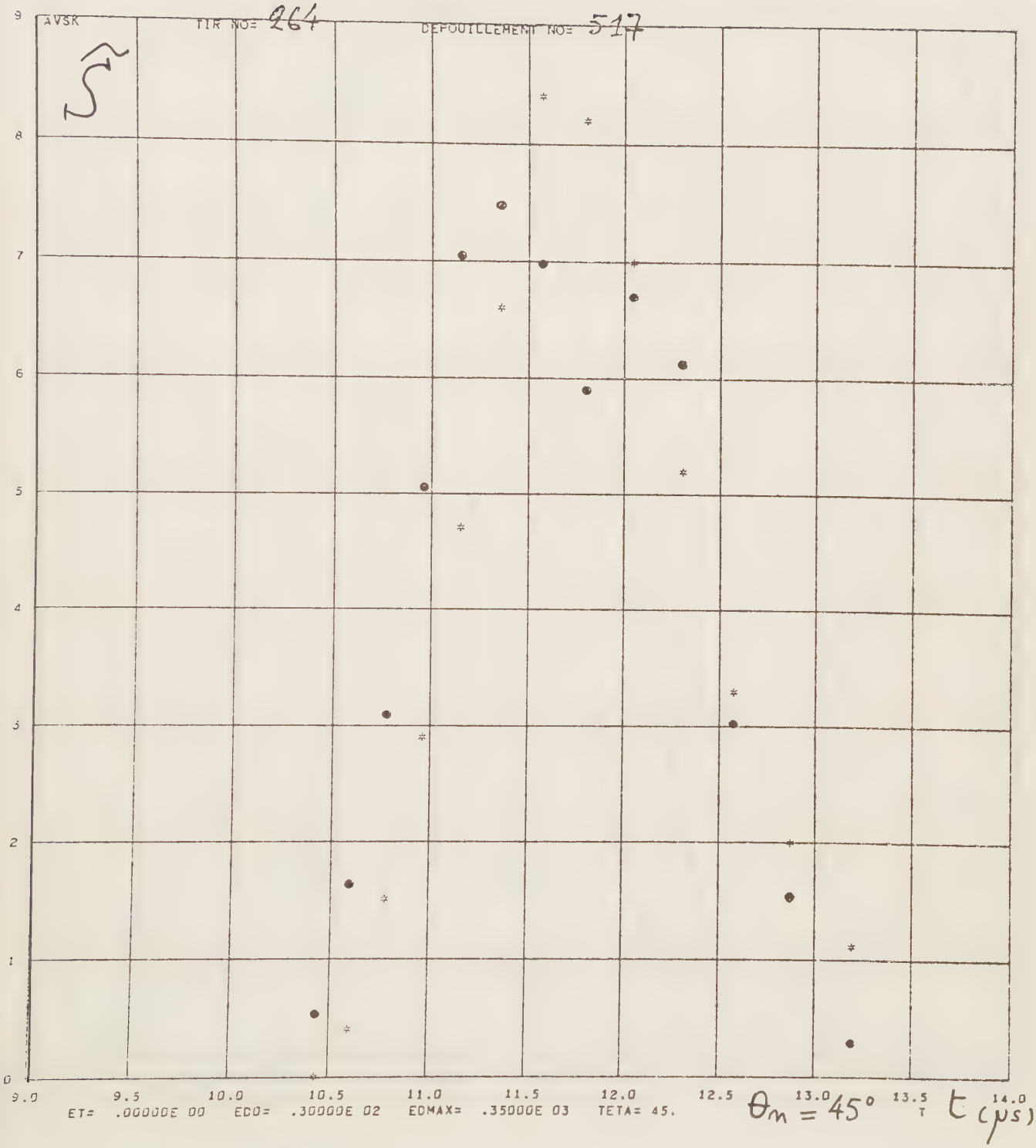


Fig. 32 b : ✳ Points expérimentaux
● Points théoriques

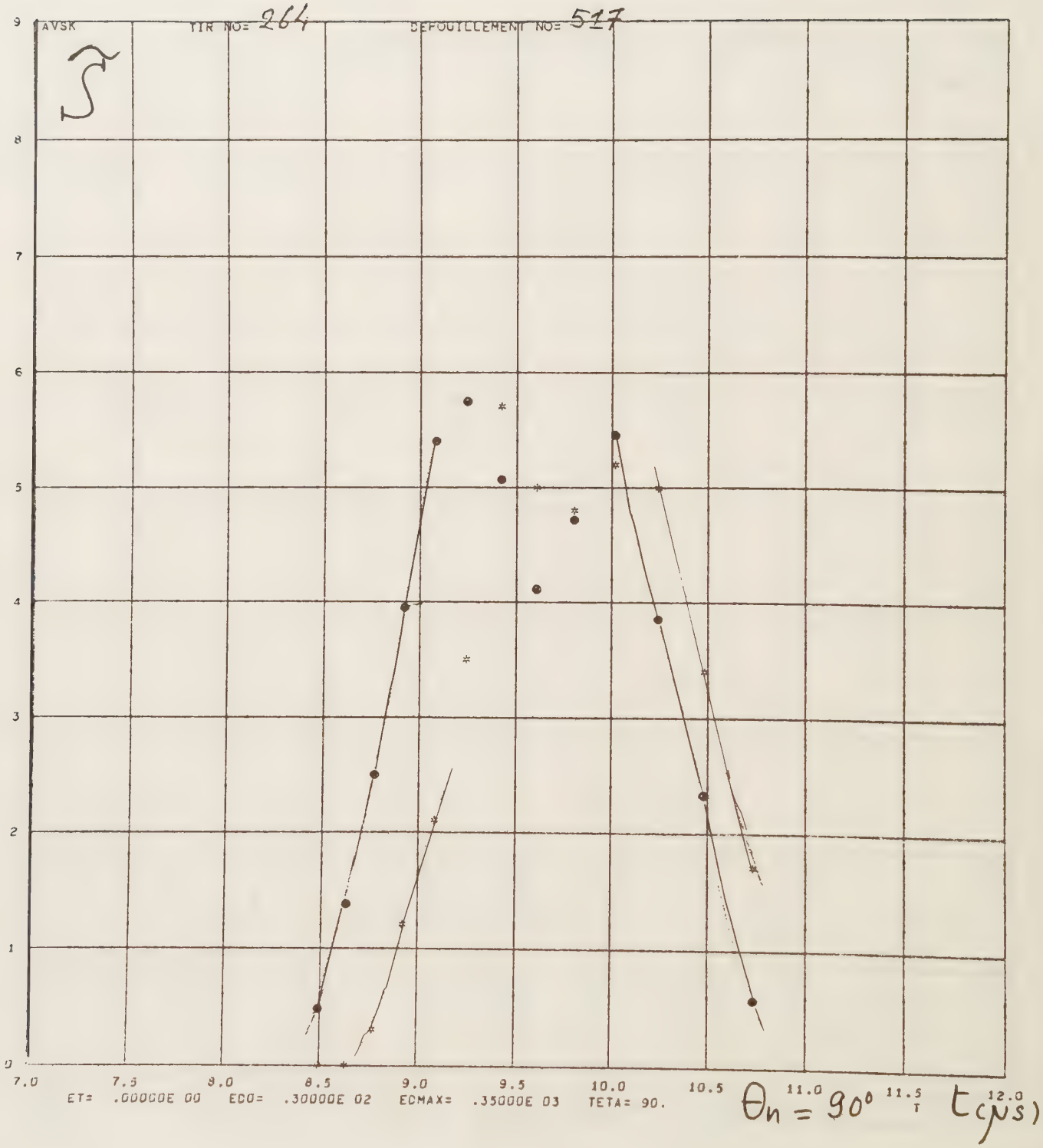


Fig. 32 c : ✳ Points expérimentaux
● Points théoriques

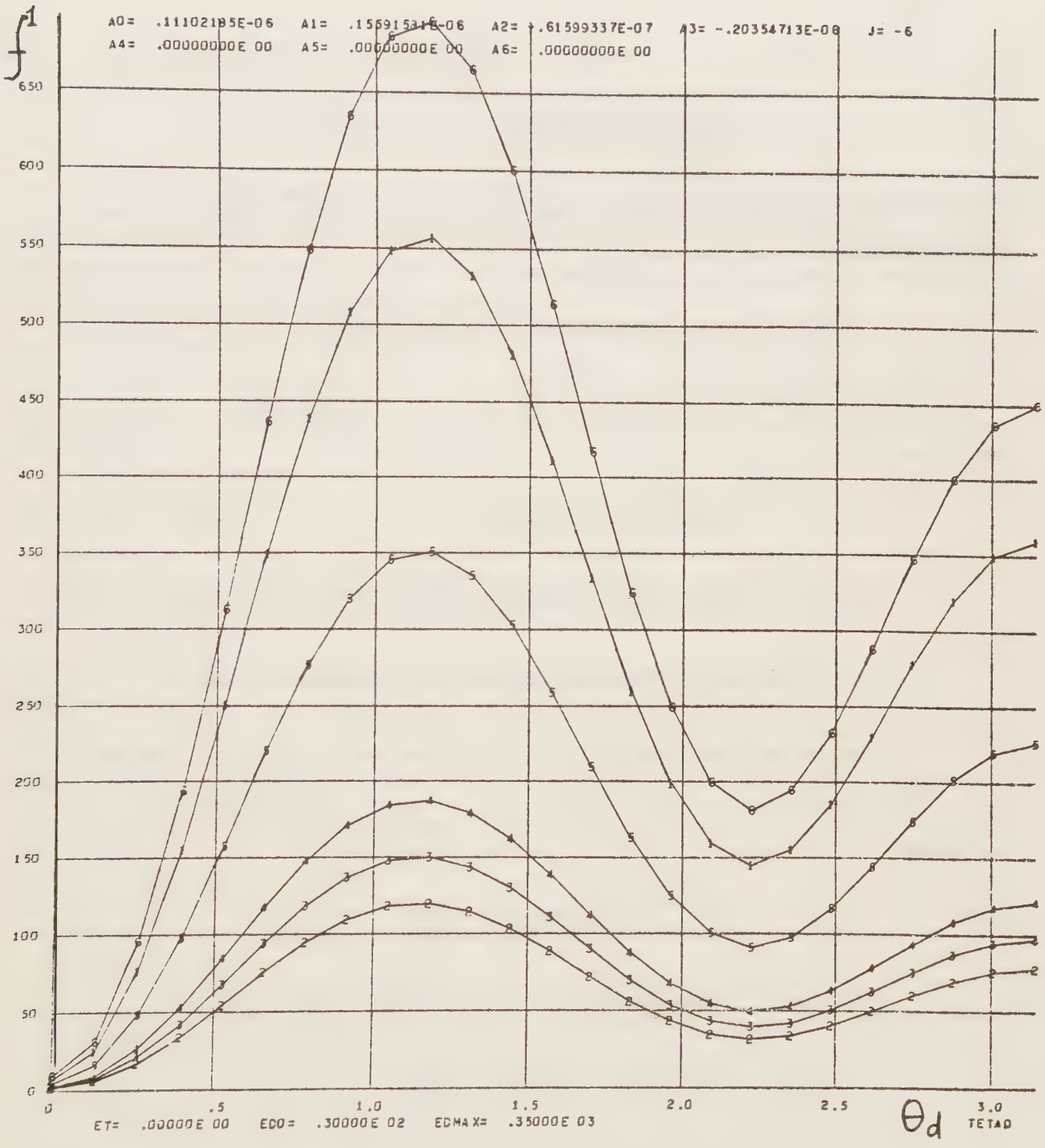


Fig. 32 d : Courbes f^1

$E_d^2 = 30$ $\quad E_d^1 = 350$ $\quad E_T = 0$ $\quad j = -6$ $\quad i = 0, 1, 2, 3.$

$s(0) = 0{,}2$ $\quad s\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2$ $\quad s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}5$

III.D.1.a. Dépouillement du tir 236 (fig. 30 a, b, c, d).

On a effectué un décalage-avance de 200 ns pour $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ et un décalage-avance de 100 ns pour $\theta_n = \frac{\pi}{4}$.

Les paramètres d'amplification optimum sont :

$g(0) = 0{,}67$ $\quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}6$

on trouve :

$$\xi/\Sigma = 0{,}3631 \times 10^{-1}$$

III.D.1.b. Dépouillement du tir 260 (fig. 31 a, b, c, d).

On a effectué un décalage-avance de 200 ns pour $\theta_n = \frac{\pi}{2}$

Les paramètres d'amplification optimum sont :

$g(0) = 0{,}67$ $\quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}8$

on trouve :

$$\xi/\Sigma = 0{,}3832 \times 10^{-1}$$

III.D.1.c. Dépouillement du tir 264 (fig. 32 a, b, c, d).

Le dépouillement se fait sans décalage

Les paramètres d'amplification sont :

$g(0) = 0{,}67$ $\quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}8$

on trouve :

$$\xi/\Sigma = 0{,}8351 \times 10^{-1}$$

III.D.2. Analyse des résultats.

III.D.2.a. Erreurs sur la détermination des α

Un programme construit à partir de celui permettant de calculer les $\alpha_{i,j}$, fait intervenir une variance estimée sur les points de mesure, donc permet de calculer la variance $\Delta\alpha$ des points α nous sommes partis d'un dépouillement du tir n° 236.

Ce dépouillement avait été établi dans les conditions suivantes :

$E_d^2 = 30$ $\quad E_d^1 = 350$ $\quad E_T = 0$ $\quad j = -6$ $\quad i = 0, 1, 2, 3.$

$g(0) = 0,67$ $\quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,6$

$\rho(0) = 1,2$ $\quad \rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,2$ $\quad \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,5$

On avait effectué un décalage-avance de 200 ns pour $\theta_n = \frac{\pi}{2}$

On a obtenu

$$\xi/\Sigma = 0,4516 \times 10^{-1}$$

$$\alpha_{0,-6} = 0,1230 \times 10^{-6}$$

$$\alpha_{1,-6} = 0,1657 \times 10^{-6}$$

$$\alpha_{2,-6} = -0,4059 \times 10^{-7}$$

$$\alpha_{3,-6} = -0,1704 \times 10^{-6}$$

Le tableau de la page 154 donne les nouveaux résultats.

	514 Essai (1)		513 Essai (2)		515 Essai (3)		516 Essai (4)	
$\alpha_{0,-6}$	0.11957070	E -06	0.10445831	E -06	0.10770614	E -06	0.10501662	E -06
$\Delta\alpha_{0,-6}$	0.14132400	E -07	0.80407932	E -08	0.16443818	E -07	0.88482906	E -08
$\alpha_{1,-6}$	0.13009267	E -06	0.11599297	E -06	0.12195380	E -06	0.11369890	E -06
$\Delta\alpha_{1,-6}$	0.49395021	E -07	0.27789611	E -07	0.55935094	E -07	0.29440783	E -07
$\alpha_{2,-6}$	-0.54071133	E -07	-0.26722881	E -07	-0.31044113	E -07	-0.27329335	E -07
$\Delta\alpha_{2,-6}$	0.35204692	E -07	0.22530921	E -07	0.45292662	E -07	0.25540707	E -07
$\alpha_{3,-6}$	-0.13847937	E -06	-0.99107201	E -07	-0.10818257	E -06	-0.84183236	E -07
$\Delta\alpha_{3,-6}$	0.79903705	E -07	0.48051606	E -07	0.96580619	E -07	0.52937609	E -07
KSI	0.57890197	E -03	0.66057426	E -03	0.61762319	E -03	0.65051842	E -03
SP2	0.10696152	E -01	0.10696152	E -01	0.10696152	E -01	0.10696152	E -01
KSI/SP2	0.54122449	E -01	0.61758119	E -01	0.57742557	E -01	0.60817983	E -01

Essai (1) : 50 % 50 % 50 % 30 % 30 % 30 % 30 % 30 % 30 % 30 % 50 % 50 % 50 % d'erreur(pour chaque angle de tir)
Essai (2) : 50 % 50 % 50 % 15 % 15 % 15 % 15 % 15 % 15 % 15 % 50 % 50 % 50 %
Essai (3) :100 % 100 % 100 % 30 % 30 % 30 % 30 % 30 % 30 % 30 % 100 % 100 % 100 %
Essai (4) :100 % 100 % 100 % 15 % 15 % 15 % 15 % 15 % 15 % 15 % 100 % 100 % 100 %

On peut alors constater que ce sont les essais (1) et (3) qui se rapprochent le plus de l'essai initial. L'erreur relative est donc supérieure à 15 % sur les points du milieu des courbes.

Par ailleurs, on peut faire également une remarque, si on considère le déterminant du système permettant de calculer les $\alpha_{i,j}$.

Tout d'abord ce déterminant est symétrique, ce qui est évident, si on considère la manière dont sont constitués ses coefficients. Par ailleurs si on considère les termes de la diagonale principale on constate que leur produit vaut approximativement 40×10^{11}, ce qu'on peut comparer à la valeur du déterminant qui est $0,6 \times 10^{11}$.

$$\frac{\text{terme diagonal}}{\text{valeur du déterminant}} = \frac{400}{6} \# 66$$

Notre base n'étant pas orthogonale, nous sommes loin d'avoir un déterminant diagonal . C'est mauvais sans être intolérable.

Par ailleurs, on peut inversement évaluer ce que représente la valeur du déterminant par rapport à la valeur de son terme diagonal soit :

$$\frac{6}{400} = \frac{3}{2} \times 10^{-2} = 1,5\ \%$$

L'erreur sur un coefficient étant de 0,1 %, l'erreur sur le terme diagonal est de 0,4 %. La valeur de notre déterminant est donc juste suffisante pour l'extraire du "bruit".

Pour ce tir l'erreur Σ / Σ donnait $0,45 \times 10^{-1}$ soit 21 %, or sur notre meilleur résultat on obtient 30 % ou 50 % suivant les points, c'est donc bien cohérent.

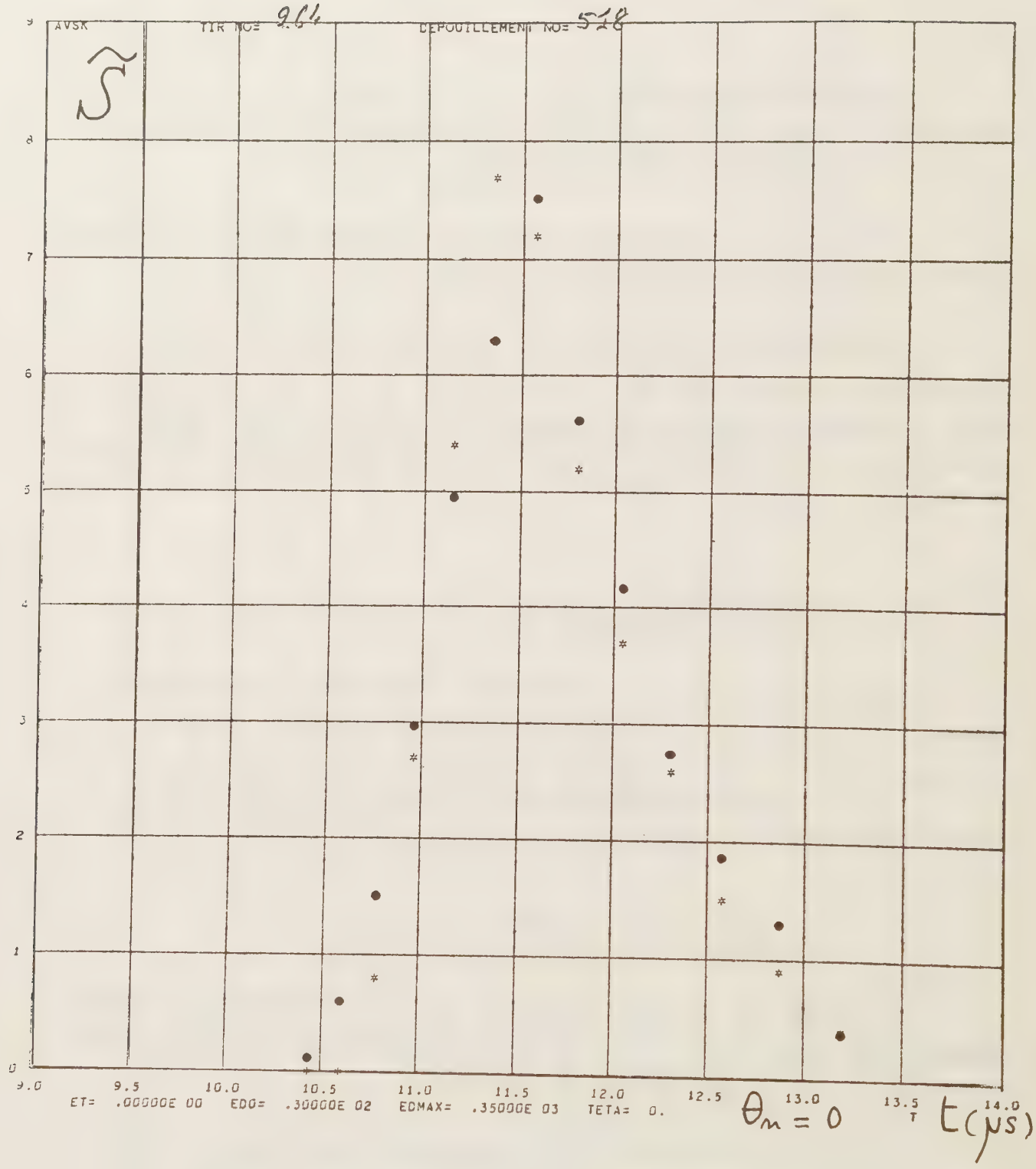


Fig. 33 a : ✳ Points expérimentaux

● Points théoriques

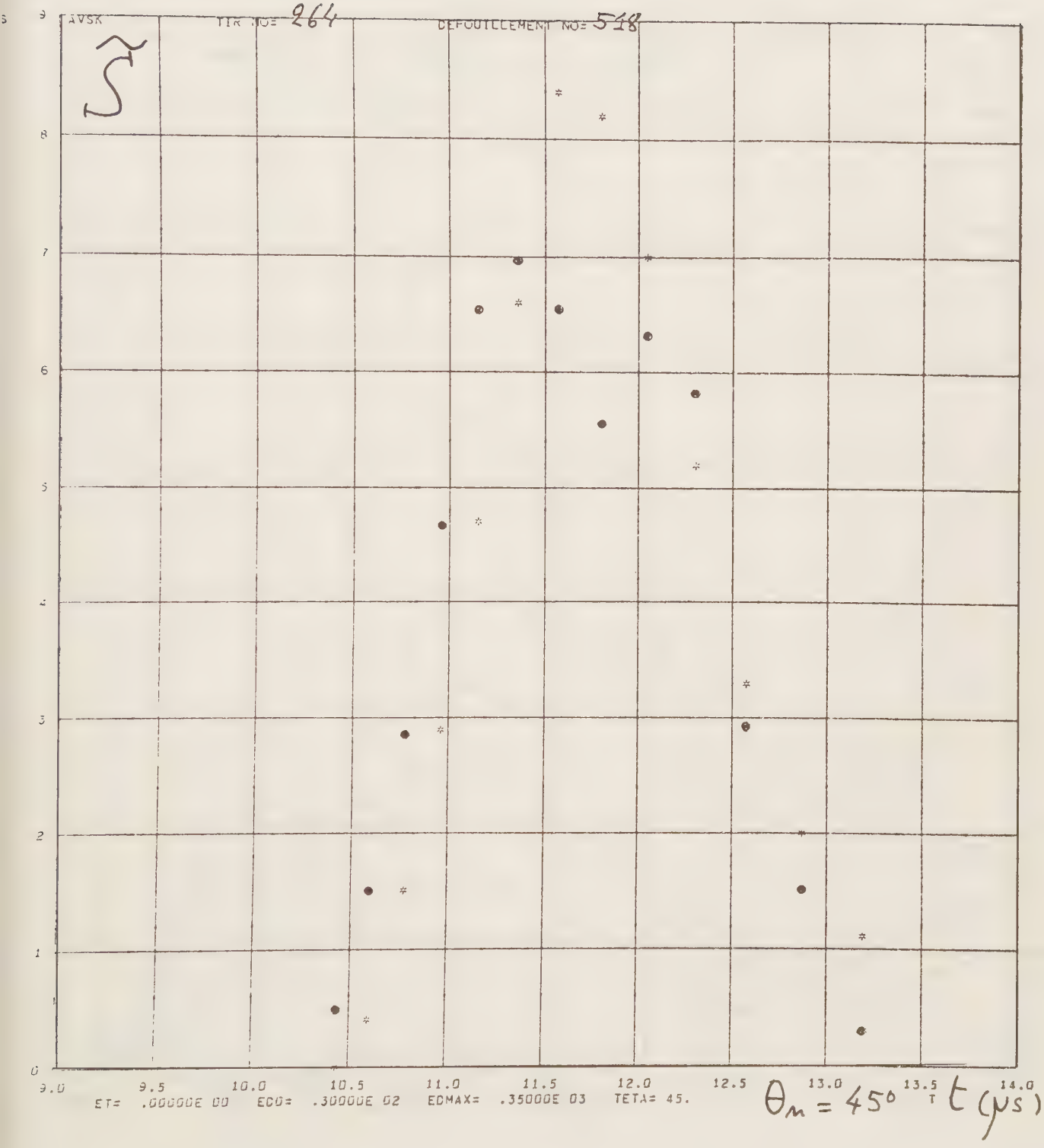


Fig. 33 b : ✳ Points expérimentaux
● Points théoriques

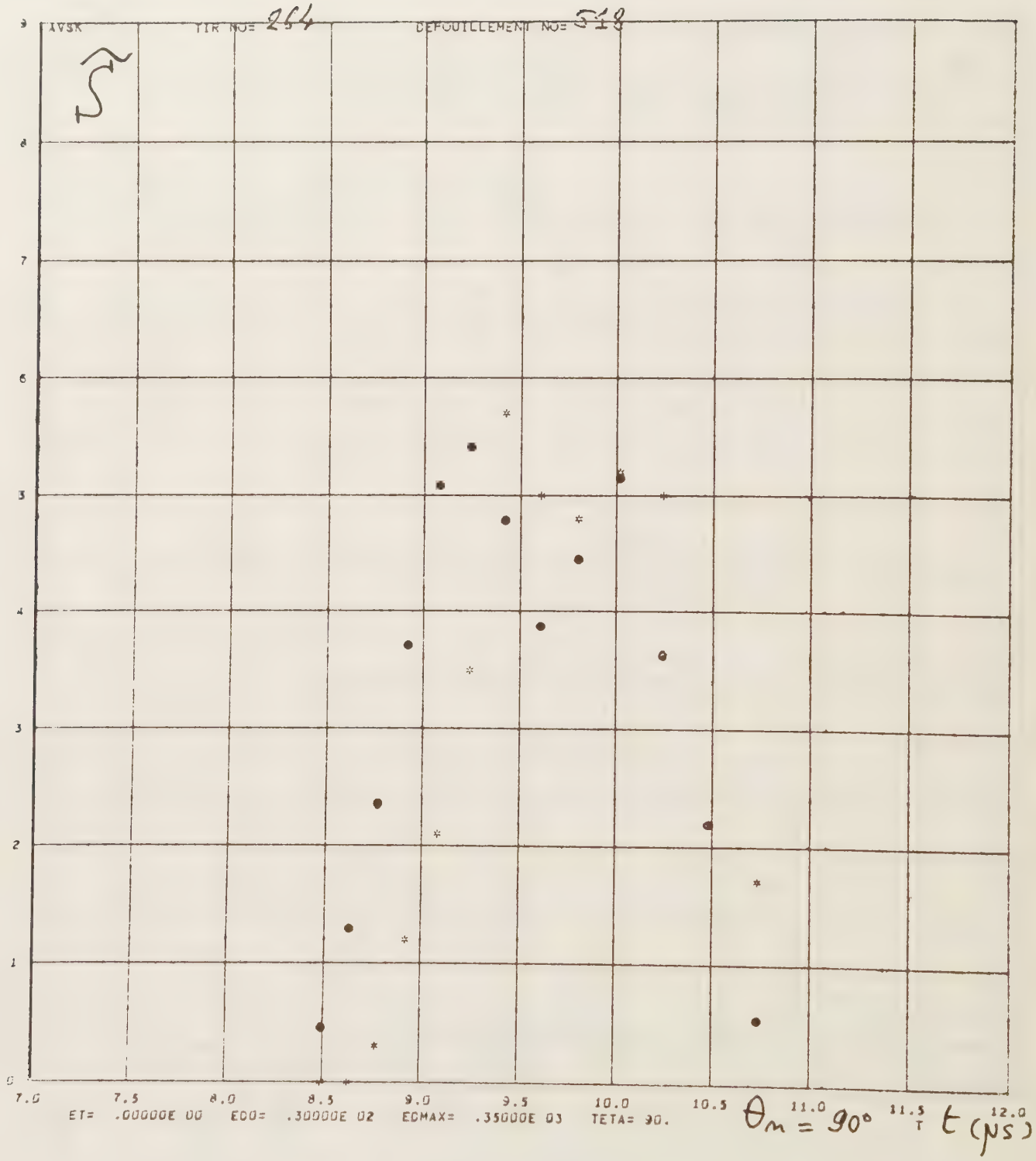


Fig. 33 c : ✱ Points expérimentaux
● Points théoriques

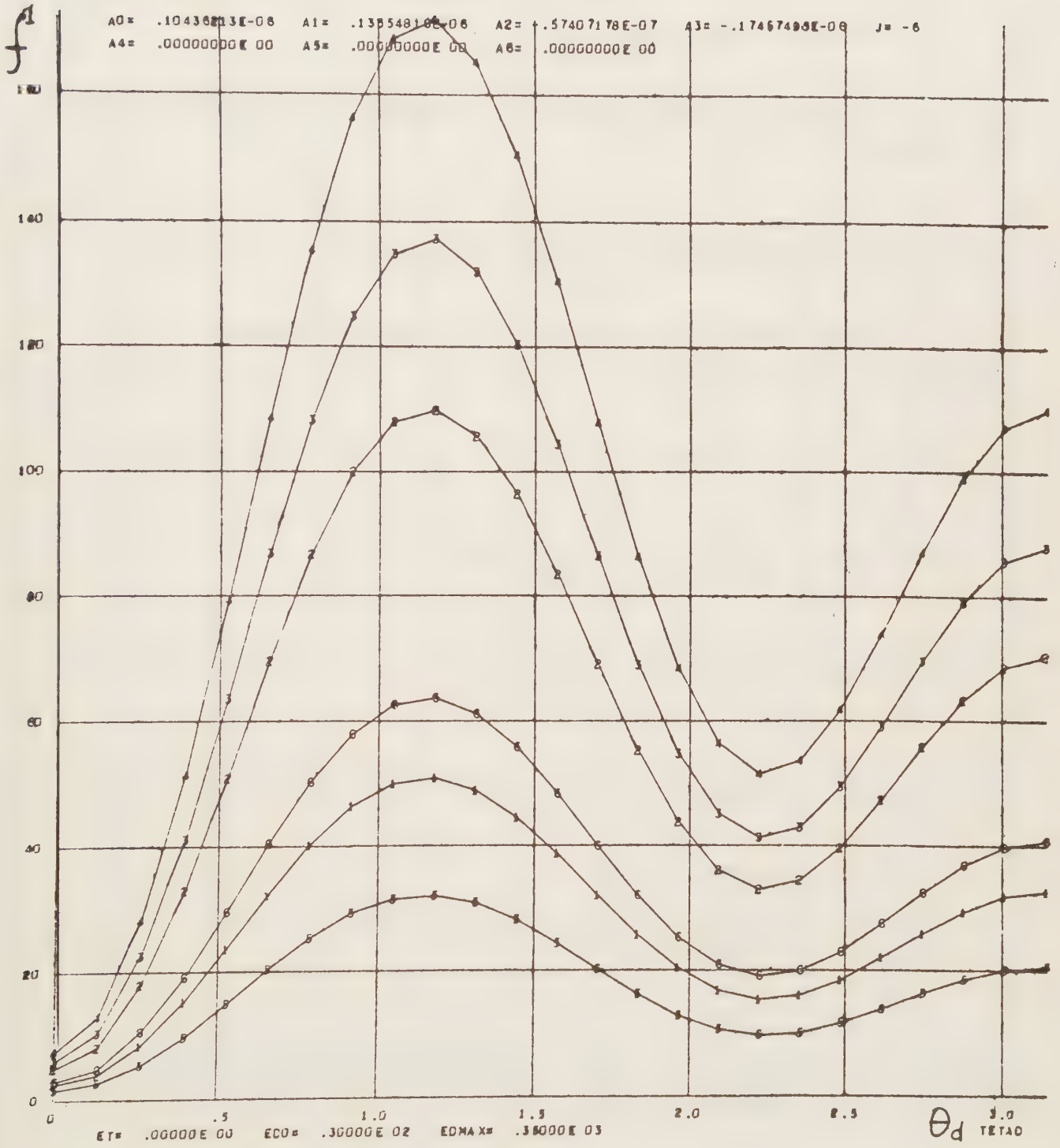


Fig. 33 d : Courbes f^1

III.D.2.b. Calcul de flux.

Un calcul de flux a été exécuté en machine. Il consiste à calculer la quantité :

$$\left[10^{-38} \times N^{-1}(\beta_{i,j}) \times 10^{-4} \times \int_{E^2}^{E^1} \left(\sum_{ij} \overline{\alpha_{i,j}}\, \overline{U_{i,j}} \right) dE \right] \times n_d n_\pi$$

C'est ainsi que des calculs de flux ont été exécutés : tir 264 (fig. 33 a, b, c, d).

$E_d^2 = 30$ $\quad E_d^1 = 350$ $\quad E_\pi = 0$ $\quad j = -6$ $\quad i = 0, 1, 2, 3.$

$g(0) = 0{,}8$ $\quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}8$

$\beta(0) = 0{,}2$ $\quad \beta\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2$ $\quad \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}5$

$\Sigma/\Sigma = 0{,}8583 \times 10^{-1}$

$\alpha_{0,-6} = 0{,}1044 \times 10^{-6}$

$\alpha_{1,-6} = 0{,}1335 \times 10^{-6}$

$\alpha_{2,-6} = -0{,}5741 \times 10^{-7}$

$\alpha_{3,-6} = -0{,}1746 \times 10^{-6}$

$\Phi_{f^1}(0,0) = 2{,}1317 \times 10^{-31} \times n_d n_\pi$

$\Phi_{f^1}\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = 2{,}2494 \times 10^{-31} \times n_d n_\pi$

$\Phi_{f^2}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 2{,}2933 \times 10^{-31} \times n_d n_\pi$

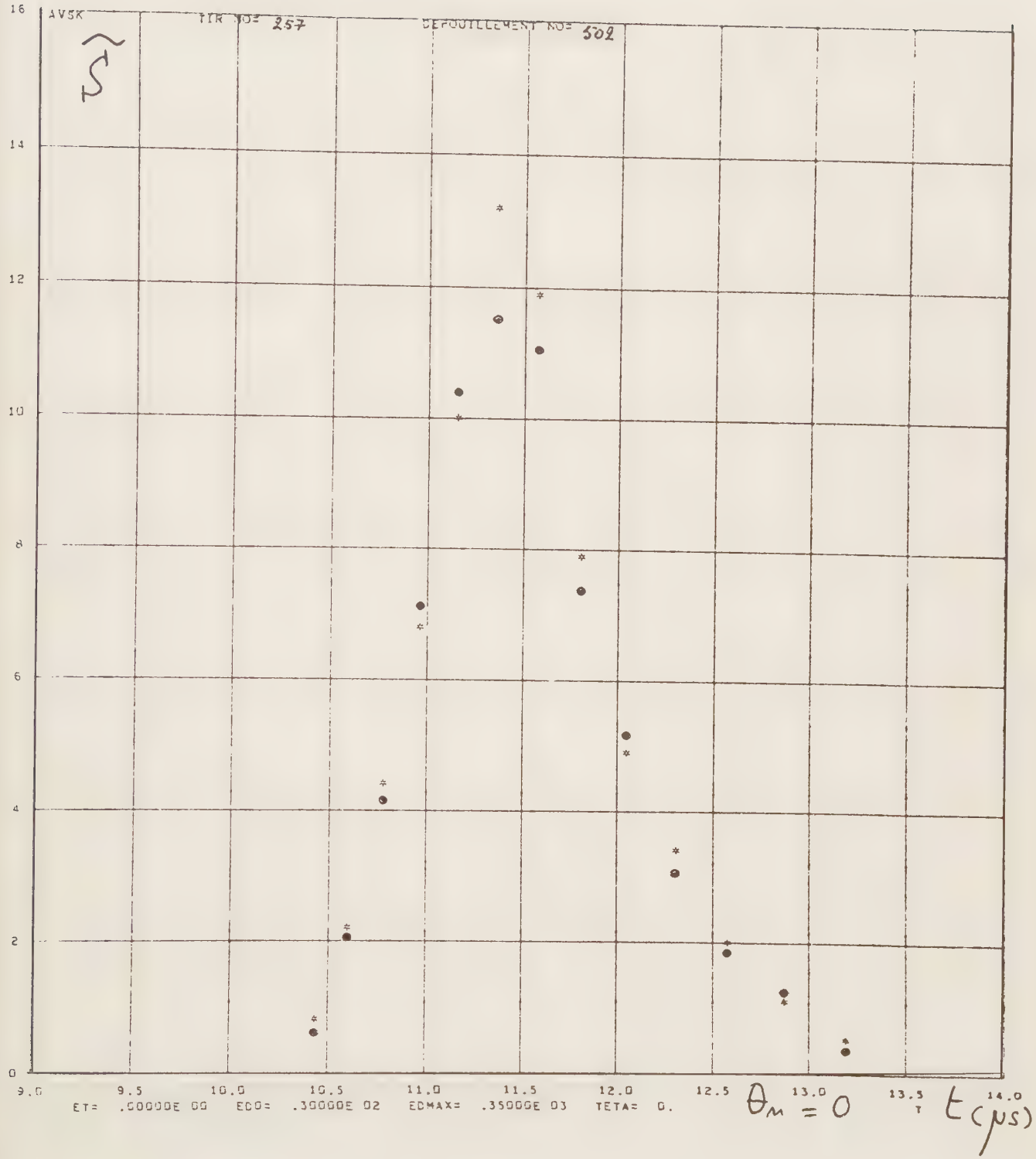


Fig. 34 a : ✳ Points expérimentaux
● Points théoriques

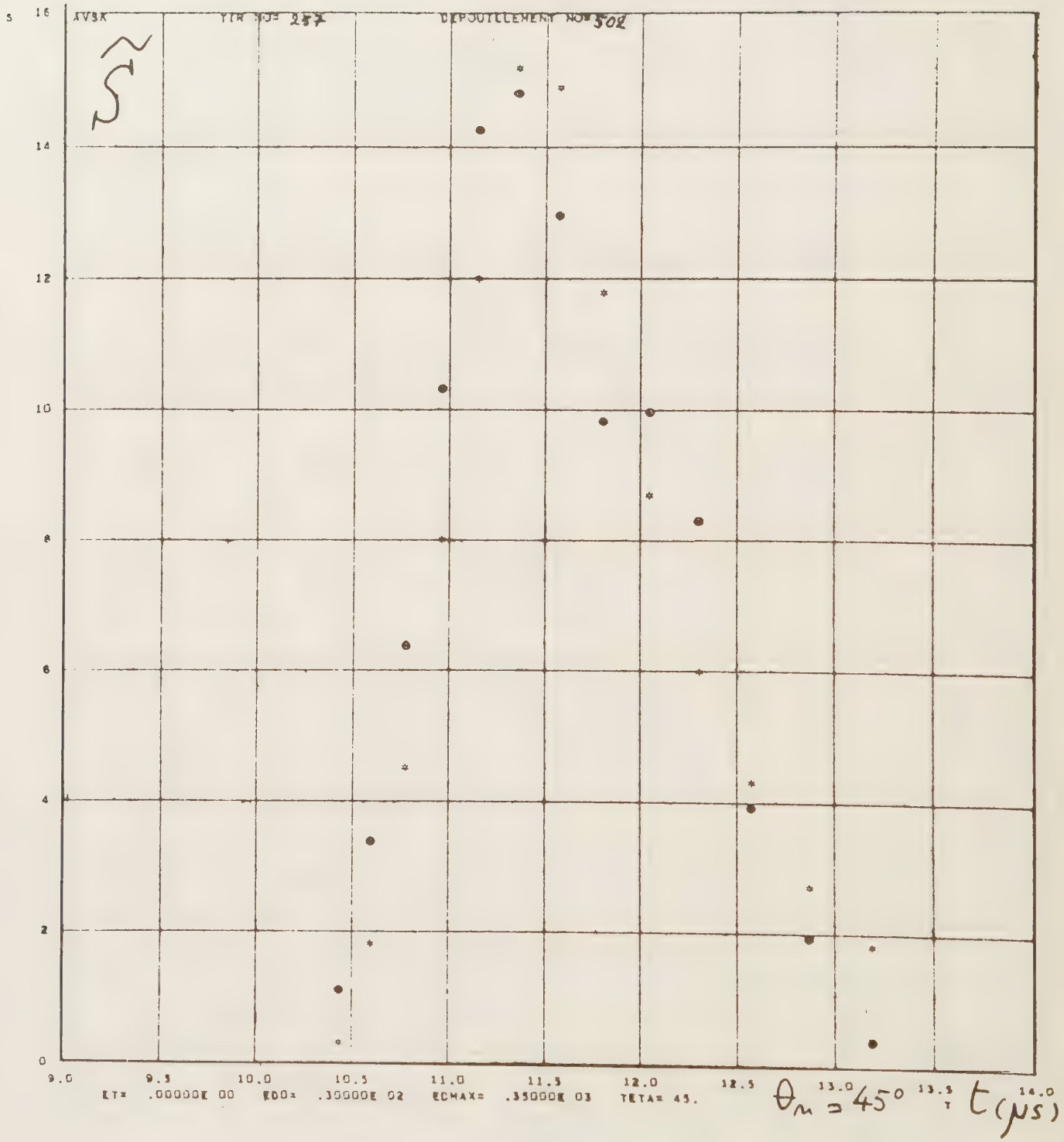


Fig. 34 b : ✱ Points expérimentaux
● Points théoriques

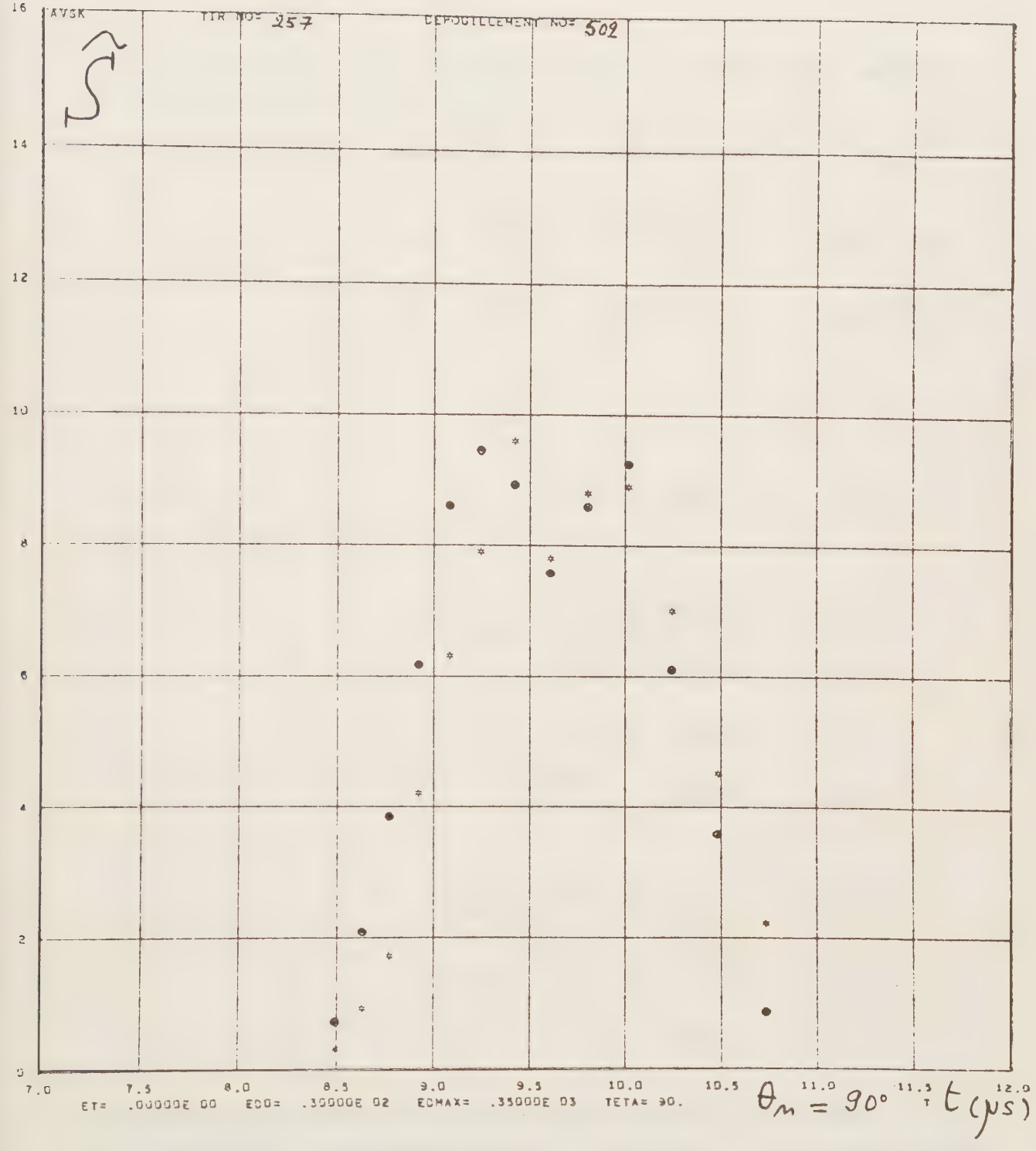


Fig. 34 c : * Points expérimentaux
● Points théoriques

Tir 257 (fig. 34 a, b, c).

$E_d^2 = 30$ $E_d^1 = 350$ $E_\pi = 0$ $j = -6$ $i = 0, 1, 2, 3.$

$g(0) = 0,67$ $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,8$

$s(0) = 0,2$ $s\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,2$ $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,5$

$$\xi / \Sigma = 0,2891 \times 10^{-1}$$

$$\alpha_{0,-6} = 0,1606 \times 10^{-6}$$
$$\alpha_{1,-6} = 0,2360 \times 10^{-6}$$
$$\alpha_{2,-6} = -0,2458 \times 10^{-7}$$
$$\alpha_{3,-6} = -0,1980 \times 10^{-6}$$

$$\Phi_{f1}(0,0) = 2,2760 \times 10^{-31} \times n_d n_\pi$$
$$\Phi_{f1}\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = 2,3007 \times 10^{-31} \times n_d n_\pi$$
$$\Phi_{f1}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 2,2535 \times 10^{-31} \times n_d n_\pi$$

Dans ces deux cas, on trouve une isotropie des flux théoriques qui justifie à postériori, notre calcul du flux global par le flux moyen à $\frac{\pi}{2}$.

5e PARTIE : CONCLUSION

Les résultats que nous avons obtenus dans le dépouillement d'un certain nombre de tirs de la décharge FOCUS (type MATHER) posent le problème de la validité du modèle employé.

Si nous appelons $S^{o}_{M}(E, \theta_n)$ le spectre mesuré, ramené à l'origine et si nous appelons

$$\xi(E_T) = \sum_{E,\theta_n} \left[S^{o}_{M}(E, \theta_n) - S_{j1}(E_T, E, \theta_n) \right]^2$$

c'est-à-dire la somme des carrés des écarts entre le spectre expérimental et le spectre théorique $S_{j1}(E_T, E, \theta_n)$, où $j^1(E_d, \theta_d)$ est une fonction de distribution non normalisée, nous avons choisi la quantité

$$\varepsilon = \frac{\xi(E_T)}{\sum_{E,\theta_n} (S^{o}_{M})^2}$$

comme significative des écarts enregistrés.

Nous pouvons estimer que ε sera satisfaisant si l'on obtient 0,01, soit $\sqrt{\varepsilon}$ = 10 % en écart relatif constant, qu'il sera moyen si l'on obtient 0,04 soit 20 % en écart relatif constant.

Les résultats que nous présentons se trouvent effectivement compris dans cette fourchette.

Pour rapprocher $\varepsilon = \xi / \Sigma$ de la valeur 0,01, nous pouvons jouer d'une part sur les paramètres du modèle E^2_d, E^1_d, E_T, j, nombre des valeurs de i.

Le modèle sera d'autant meilleur que chacun de ces paramètres, tout en restant indépendant, agira plus fortement.

Nous pouvons établir un premier bilan qualitatif de ces influences. Les paramètres E_d^1 , j , nombre de i , agissent fortement, comme nous l'avons longuement expliqué, et permettent de faire décroître nettement ε . E_d^2 joue très nettement sur la détermination du flux, donc de la quantité $n_d \Delta V$.

D'autre part, après ajustement préalable de ces paramètres, donc après un travail sur le modèle, nous pouvons faire intervenir l'incertitude sur le dépouillement des courbes expérimentales, donc retoucher leur calage temporel (calage en énergie) et le gain de la chaîne de mesure $g\ (\theta_n)$, dont la détermination résulte d'un étalonnage relatif et que nous avons été amenés à réajuster quelquefois.

Si le lissage des courbes expérimentales ne pose pas de gros problèmes, par contre le calage temporel est un paramètre très sensible pour la recherche du minimum de ε et c'est finalement son ajustement qui permet la détermination la plus achevée de ε et de E_d^2, E_d^1 , E_T , j et du nombre de termes en i .

C'est ainsi que dans tous les cas après ajustement de l'ensemble de ces paramètres et notamment des calages temporels dans les limites ne dépassant pas 100 keV (résolution pratique en énergie), on rend ε inférieur à 0,04. Ceci a été obtenu pour tous les tirs après décalages, ce qui montre bien que nos paramètres interviennent tous dans les limites d'un ε moyen.

Par contre lorsqu'on veut dépasser cette valeur, on se heurte à un certain nombre de difficultés qui montrent les limites de notre modèle.

D'une part E_T semble peu agir pour ε inférieur à 0,04. Le problème de l'indépendance de ce paramètre est donc posé. Nous savons en effet que le développement en cos θ_d et la quantité E_T jouent un rôle analogue, celui d'introduire une anisotropie. Malgré cette difficulté il serait intéressant de savoir si E_T est nul ou non : en effet la mise en mouvement de la cible aurait une signification très importante pour le comportement de l'ensemble des particules (distribution des deutérons dans la "bulle"). Cette détermination

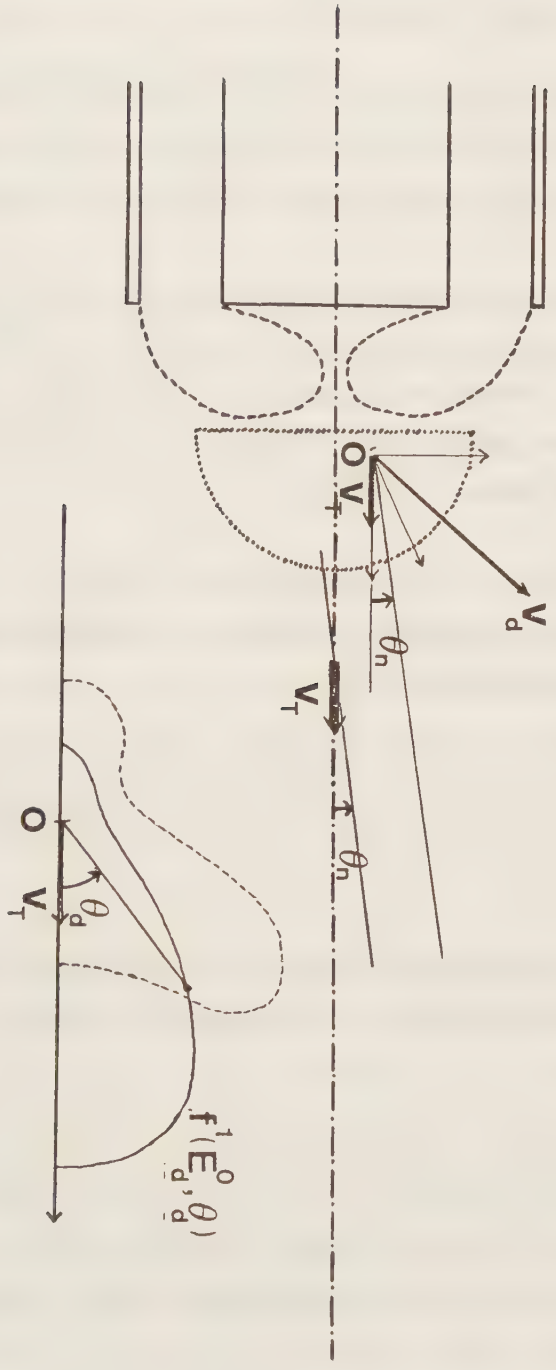


Fig. 35 : Représentation polaire des résultats obtenus

serait possible à condition de mettre en oeuvre un programme de test supplémentaire long et délicat (test de modélisation). Les temps nécessaires pour le calcul ne nous ont pas permis de le faire.

D'autre part, nous rappelons que E_d^2 n'est pas déterminé au niveau du spectre mais au niveau du flux et que cela revient à réintroduire indirectement l'espace au niveau de la source, comme nous l'avons expliqué page 72.

Notons également le problème posé par les décalages temporels. Dans la limite de 100 keV, ils nous permettent très nettement d'améliorer les valeurs de ε , mais ils se font toujours dans le même sens : rapprochement du sommet à 0° et du point milieu ou du sommet à $\frac{\pi}{2}$, ce qui traduit une rigidité du modèle dans le calage temporel.

De même les ajustements sur les $g(\theta_n)$ peuvent apporter des améliorations. Cela ne paraît pas trop anormal, puisqu'il s'agit d'étalonnages réalisés avec une forte erreur expérimentale.

En définitive, nous avons un jeu de paramètres qui interviennent d'une façon positive et relativement indépendante, à l'exception de E_r, pour faire décroître ε .

Dans ce cadre, on trouve une bonne stabilité de la solution f^1 correspondant à des spectres de forme et de décalages donnés.

Les courbes f^1 en fonction de θ_d et à E_d donné se divisent en deux catégories, une dont le maximum maximorum est situé à 0 radian, l'autre dont le maximum maximorum évolue faiblement autour de 1 radian. Nous considèrons que cet "accrochage" des valeurs est dû au modèle numérique choisi et ne reflète probablement pas une réalité physique plus profonde (voir figure 35).

Les études récemment entreprises sur la résolution spatiale et temporelle (comme nous l'avons signalé dans notre introduction) ont apporté de nouveaux éléments d'information sur la validité du modèle.

Remarquons tout d'abord qu'une émission tardive au voisinage de l'électrode centrale pourrait donner lieu à l'association au modèle utilisé d'un modèle thermique avec l'espoir de rendre compte plus précisément de l'ensemble de l'émission neutronique.

La carte de l'émission trouvée entre 0 et 100 ns n'est pas incompatible avec le modèle à densité constante que nous avons utilisé ici.

D'autre part, l'observation du volume émissif pendant 0 - 100 ns avec un gros maillage (fenêtre de 23 mm) présenté dans l'introduction, met en évidence que parmi les neutrons émis au début, il y en a loin des électrodes, en avant du front de densité; ils semblent difficiles à expliquer autrement que par le mécanisme faisceau-cible, que nous avons développé dans ce travail.

Si maintenant nous essayons de dresser un bilan de notre entreprise, nous pouvons faire état d'un certain nombre de résultats positifs : nous avons réussi à dépouiller avec une certaine fidélité les spectres mesurés dans trois directions à la fois. Bien sûr, d'une part reste une incertitude sur E_T (vitesse de la cible), quoiqu'on ait essayé de déceler les cas où E_T serait différent de 0. D'autre part on a pu remarquer la difficulté du modèle a rendre compte des écarts énergétiques entre les différents spectres. C'est aussi un bon résultat que d'avoir pu satisfaire assez aisément à la contrainte de positivité avec la forme choisie pour la fonction de distribution simple des vitesses $f^1(E_d, \theta_d)$ des particules accélérées.

Si nous mesurons le chemin parcouru par rapport au premier article de BERNSTEIN, il est en fait assez important. Sans apporter d'idées fondamentales nouvelles, nous avons vraiment exploité jusqu'au bout le modèle proposé et introduit dans le détail un certain nombre d'éléments originaux. L'utilisation d'une matrice de transfert dans le dépouillement des spectres est un résultat simple mais qui n'est pas moins intéressant, le traitement complet des calculs avec vitesse de la cible a apporté beaucoup de complications mais est susceptible de donner une information capitale, enfin la présentation

mathématique explicite choisie pour la détermination de f^1 permet une utilisation rationnelle de la méthode des moindres carrés et de ses possibilités. Nous avons de ce fait substitué aux grossiers diagrammes à 3 ou 4 points de BERNSTEIN des spectres construits avec un pas dont nous pouvons déterminer la finesse et dont la forme peut épouser parfois très correctement celle des spectres expérimentaux /10/, /12/.

Notons enfin que les difficultés expérimentales rencontrées (il y a des machines différentes avec des mécanismes différents, pour une même machine la répétitivité n'existe pas) peuvent faire comprendre nos propres difficultés théoriques. Compte tenu de toutes ces considérations, nous pouvons donc suggérer qu'un mécanisme faisceau-cible peut expliquer l'émission neutronique FOCUS, dans certaines régions émissives. L'ensemble du mécanisme émissif ne s'y réduit pas.

Ultime résultat intéressant, il existe maintenant un code disponible pour tester l'existence d'un tel mécanisme.

ANNEXE A

ETUDE DETAILLEE DE L'INTEGRALE S_{f_1} DANS LE CAS FAISCEAU-CIBLE A SYMETRIE AZIMUTALE

I. TRIGONOMETRIE SPHERIQUE.

Pour terminer le calcul explicite de l'intégrale S_{f_1}, il nous faut maintenant donner l'expression de $g\ (E_d, \theta_d, E_\pi)$, de $\sigma_d^1\ (E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{nl})$ et de $E_n\ (E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{nl})$.

Nous nous proposons ici d'étudier plus finement la géométrie de la réaction nucléaire, de donner les formules trigonométriques essentielles et les propriétés géométriques nécessaires à la bonne compréhension de la marche du calcul.

La figure 8 (2e partie, II.C.3.) fait apparaître les relations (2), (3) et (4) déjà énoncées entre les différents vecteurs :

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{v}_d + \vec{v}_\pi}{2}$$

$$\vec{g} = \vec{v}_d - \vec{v}_\pi$$

$$\vec{v}_{nl} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_n$$

On a défini (relation (24)) :

$$\rho = \frac{v_\pi}{v_d} = \sqrt{\frac{E_\pi}{E_d}}$$

E_π devant être tel que :

$$E_\pi < E_d^2 \quad \text{(strictement)}$$

(si on veut avoir affaire à un modèle faisceau-cible).

$$E_d \in \left[E_d^2, E_d^1\right] \quad \text{ceci entraîne} \quad \rho < 1$$

Par définition :

$$0 \leqslant \theta_d \leqslant \pi$$
$$0 \leqslant \theta_n \leqslant \pi$$
$$0 \leqslant \varphi_d \leqslant 2\pi$$
$$0 \leqslant \varphi_{n\ell} \leqslant 2\pi$$

de $\rho < 1$, il découle :

$$0 \leqslant \theta_{cm} \leqslant \theta_q \leqslant \pi$$

Un calcul élémentaire donne alors (triangle $\vec{v_d}$, $\vec{v_\pi}$) :

$$q = \left(\frac{2E_d}{m_d}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta_d\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(A1)}$$

on en déduit l'énergie de bombardement E_B (relation (2))

$$E_B = \frac{1}{2} m_d q^2 = E_d \left(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta_d\right)$$

Ceci nous permet de calculer W_n, énergie du neutron dans le centre de masse, dans le système du laboratoire (relation (1))

$$W_n = \frac{3}{4}\left[Q + \frac{E_d}{2}\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)\right]$$

ce qu'on met sous la forme pratique

$$8W_n = 6Q + 3E_d\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right) \qquad (A2)$$

On remarque immédiatement que g et W_n ne dépendent pas de φ_d, en vertu de la symétrie azimutale autour de $\vec{v}$: $g(E_d, \theta_d, E_T)$, $W_n(E_d, \theta_d, E_T)$.

Pour calculer E_n, nous faisons intervenir les angles ψ_n et ψ_ℓ définis par les relations (23)(fig. A1).

$$\left(\vec{v}_{cm}, \vec{v}_n\right) = \psi_n \qquad 0 \leqslant \psi_n \leqslant \pi$$

$$\left(\vec{v}_{cm}, \vec{v}_{n\ell}\right) = \psi_\ell \qquad 0 \leqslant \psi_\ell \leqslant \pi$$

Si nous introduisons le rapport γ (relation (24))

$$\gamma = \frac{v_{cm}}{v_n} = \sqrt{\frac{E_{cm}}{2W_n}}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_d\left(1+\rho^2+2\rho\cos\theta_d\right)}{6Q+3E_d\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)}} \qquad (A3)$$

On remarque que γ aussi ne dépend pas de φ_d .

Des considérations géométriques élémentaires nous donnent alors la forme de E_n (formule trigonométrique dans le triangle formé par $\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}_n$, $\vec{v}_{nl}$) présentée formule (25) :

$$E_n = W_n \left(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos\psi_n\right)$$

W_n et γ ne dépendent pas de φ_d , E_n n'en dépendra que par l'intermédiaire de ψ_n .

De plus, l'application du théorème de PYTHAGORE au triangle ($\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}_n$, $\vec{v}_{nl}$) nous permet de calculer E_n en fonction de ψ_l et d'écrire l'égalité :

$$\left.\begin{aligned} E_n &= W_n \left[\left(1 - \gamma^2 \sin^2\psi_l\right)^{\frac{1}{2}} + \gamma\cos\psi_l\right]^2 \\ &= W_n \left(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\psi_n\right) \end{aligned}\right\} \text{(A4)}$$

Dans tous les raisonnements qui vont suivre on est amené à prendre le plan contenant $\vec{v}_\pi$ et passant par $\vec{v}_{nl}$ comme plan de référence. En effet, on étudie les variations de la géométrie de la réaction, quand le vecteur $\vec{v}_d$ varie, pour une direction d'observation donnée (θ_n et φ_{nl} fixés) c'est-à-dire pour un support de $\vec{v}_{nl}$ fixé.

Toujours dans le triangle ($\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}_n$, $\vec{v}_{nl}$), nous calculons ψ_n en fonction de ψ_l :

$$\operatorname{tg}\psi_l = \frac{\sin\psi_n}{\cos\psi_n + \gamma} \qquad \text{(A5)}$$

inversement, compte tenu des intervalles de variation de ψ_ℓ et ψ_n :

$$\cos\psi_n = -\gamma \sin^2\psi_\ell + \cos\psi_\ell \left(1 - \gamma^2 \sin^2\psi_\ell\right)^{\frac{1}{2}}$$

Enfin l'application de la formule générale de la trigonométrie sphérique au dièdre d'arête $\vec{v}_n$ et dont les faces sont définies par les vecteurs $\vec{v}_{cm}$ et $\vec{v}_{n\ell}$ nous donne l'angle ψ_ℓ :

$$\cos\psi_\ell = \cos\theta_n \cos\theta_{cm} + \sin\theta_{cm} \sin\theta_n \cos(\varphi_d - \varphi_{n\ell}) \qquad (A6)$$

En définitive E_n ne dépend de φ_d et de $\varphi_{n\ell}$ que par l'intermédiaire de $\varphi_d - \varphi_{n\ell}$. Il en est de même pour ψ_n et ψ_ℓ .

On peut donc prendre $\varphi_{n\ell}$ comme origine :

$$\varphi_{n\ell} = 0$$

Les mêmes considérations de symétrie sur la géométrie du choc nous permettent d'affirmer que toutes les quantités angulaires ne dépendent que de $\varphi_d - \varphi_{n\ell}$, ce qui nous permet d'écrire définitivement :

$$\cos\psi_\ell = \cos\theta_n \cos\theta_{cm} + \sin\theta_n \sin\theta_{cm} \cos\varphi_d$$

Par ailleurs, il apparaît sur la formule de définition de ψ_ℓ fonction de φ_d , que l'on peut restreindre l'intervalle de variation de

$$0 \leqslant \varphi_d \leqslant \pi$$

pour étudier les variations de ψ_ℓ .
Ce qui est vrai pour ψ_ℓ , l'est pour ψ_n et pour E_n .

Cette remarque découle d'une symétrie évidente de la figure 8.

II. CALCUL DE LA SECTION EFFICACE DIFFERENTIELLE DE LA REACTION DANS LE SYSTEME DU LABORATOIRE.

La formule (23) a défini l'angle χ , qui est l'angle de $\vec{v}_n$ avec $\vec{g}$ (fig. 8).

$$\chi = (\vec{g}, \vec{v}_n)$$

Nous savons que dans le système du centre de masse, la section efficace différentielle de la réaction D - D avec production d'un He_3 et d'un neutron s'écrit : /13/

$$\sigma_d(g,\chi) = \frac{\sigma_\pi(g)}{4\pi} \cdot \frac{1 + A(g)\cos^2\chi + B(g)\cos^4\chi}{1 + \frac{A(g)}{3} + \frac{B(g)}{5}}$$

ou dans le système du laboratoire

$$\sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n, \varphi_{n\ell}) = \sigma_d(g,\chi) \frac{d^2\vec{\Omega}_{cm}}{d^2\vec{\Omega}_{lab}}$$

Une relation classique en physique nucléaire /14/ nous donne alors :

$$\frac{d^2\vec{\Omega}_{cm}}{d^2\vec{\Omega}_{lab}} = \frac{\sin\psi_n}{\sin\psi_\ell} \cdot \frac{d\psi_n}{d\psi_\ell}$$

on calcule $\frac{d\psi_n}{d\psi_\ell}$, $\sin\psi_\ell$

$$\frac{d\psi_n}{d\psi_\ell} = \frac{1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\psi_n}{1 + \gamma\cos\psi_n}$$

$$\sin\psi_\ell = \frac{\sin\psi_n}{(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\psi_n)^{\frac{1}{2}}}$$

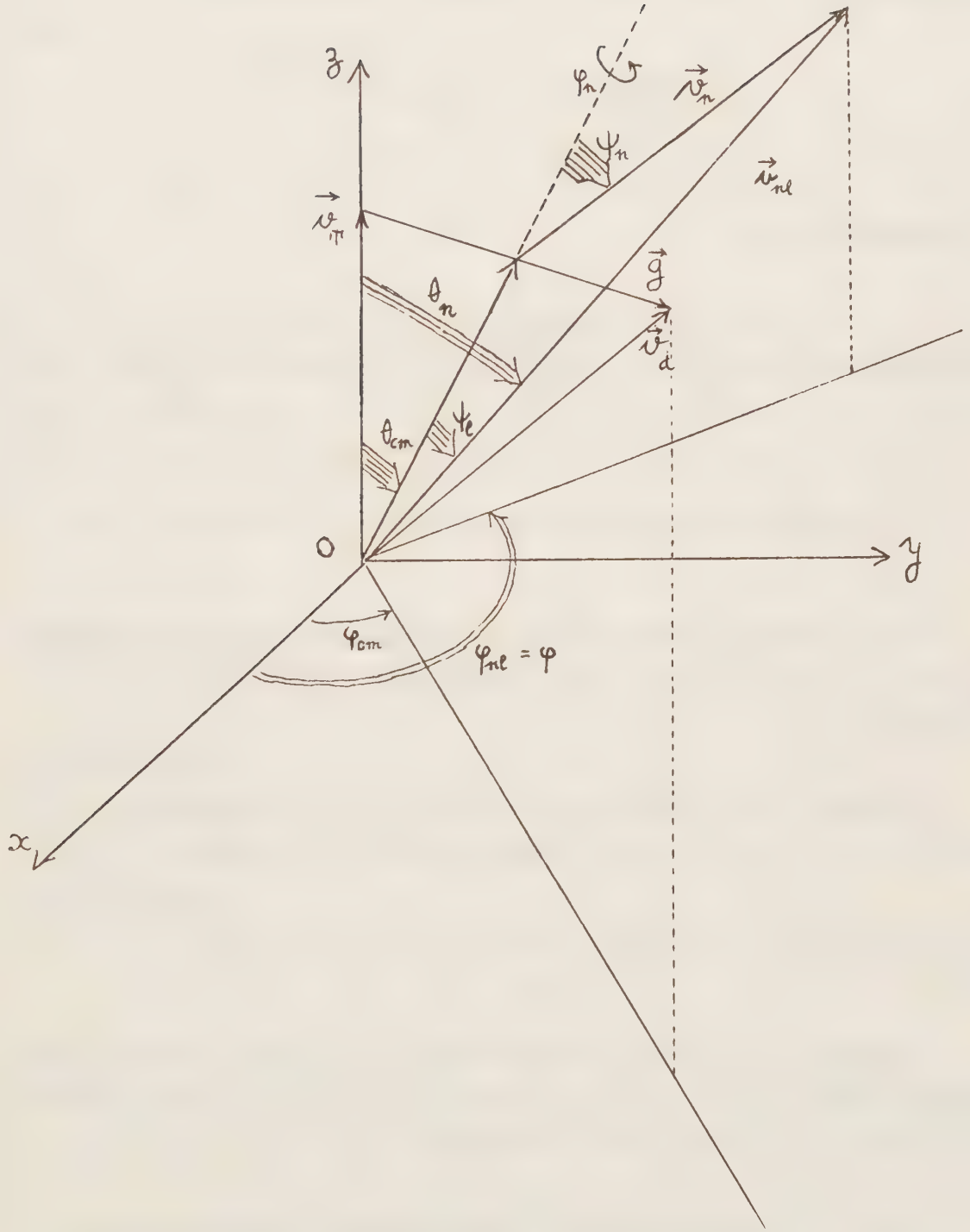


Fig. A 1 : Relations entre les angles solides de 2 référentiels en mouvement relatif.

et nous aboutissons à :

$$\frac{d^2\vec{\Omega}_{cm}}{d^2\vec{\Omega}_{lab}} = \frac{(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n)^{\frac{3}{2}}}{1+\gamma\cos\psi_n}$$

d'où l'expression de σ_d^1

$$\sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_T, \theta_n, \varphi_{nl}) = \frac{\sigma_T(g)}{4\pi} \cdot \frac{1+A(E_B)\cos^2\chi + B(E_B)\cos^4\chi}{1+\frac{A(E_B)}{3}+\frac{B(E_B)}{5}} \cdot \frac{(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n)^{\frac{3}{2}}}{1+\gamma\cos\psi_n} \qquad (A7)$$

Il nous faut maintenant calculer l'angle χ en fonction de φ_d et φ_{nl} .

De la considération de la figure 8, il apparaît que χ ne dépend comme ψ_l et ψ_n , que de $\varphi_d - \varphi_{nl}$. Nous faisons donc $\varphi_{nl} = 0$, dans tout ce qui va suivre.

De même χ répond dans ses variations aux mêmes considérations de symétrie que ψ_l et ψ_n et l'on peut prendre φ_d dans l'intervalle $[0, \pi]$

En définitive nous prenons le plan $(\vec{v}_T, \vec{v}_{nl})$ comme plan d'origine (fig. A5).

Appelons φ_n l'angle du dièdre d'arête $\vec{v}_{cm}$ et dont les faces passent respectivement par $\vec{g}$ et $\vec{v}_n$; ces faces sont deux demi-plans contenant les extrémités des vecteurs $\vec{v}_d$ et $\vec{v}_{nl}$ (fig. A1).

Si on considère le dièdre d'arête $\vec{v}_{cm}$ et dont les faces passent par $\vec{v}_\pi$ et par $\vec{v}_n$, on constate que son angle est égal à $\pi - \varphi_n$, puisqu'on a substitué au demi-plan $(\vec{v}_{cm}, \vec{v}_d)$ le demi-plan $(\vec{v}_{cm}, \vec{v}_\pi)$.

La considération du polyèdre qui passe par $\vec{v}_\pi$, $\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}_{nl}$, nous permet d'écrire la relation :

$$\cos\theta_n = \cos\theta_{cm}\cos\psi_l - \sin\theta_{cm}\sin\psi_l\cos\varphi_n$$

L'angle dièdre φ_n est un angle qui ne dépend que θ_{cm} et θ_n et de la position respective de $\vec{v}_\pi$ et $\vec{v}_d$ par rapport à $\vec{v}_{cm}$, on peut donc réduire le domaine de variation de θ_{cm} pour l'étude des variations de φ_n et la détermination de ses valeurs extrêmes ($\varphi_d = 0$, $\varphi_d = \pi$).

θ_n	0	θ_{cm}	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - \theta_{cm}$	π
valeur initiale de φ_n $\varphi_d = 0$	π	0	0	0	
valeur finale de φ_n $\varphi_d = \pi$	π	π	π	0	

ceci en prenant

$$0 \leqslant \theta_{cm} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

si $\theta_{cm} > \frac{\pi}{2}$, la formule donnant φ_n ne change pas en changeant θ_n en $\pi - \theta_n$ et φ_n en $\pi - \varphi_n$ et on a obtenu ainsi l'ensemble des variations de φ_n pour l'ensemble des variations de θ_{cm} et θ_n.

Par ailleurs, en considérant le dièdre d'arête $\vec{v}_{cm}$ dont les faces passent respectivement par $\vec{g}$ et $\vec{v}_n$, donc d'angle φ_n , en remarquant que (fig. 8)

$$\left(\vec{v}_{cm}, \vec{g}\right) = \theta_g - \theta_{cm}$$

on peut écrire :

$$\cos\chi = \cos(\theta_g - \theta_{cm})\cos\psi_n + \sin(\theta_g - \theta_{cm})\sin\psi_n\cos\varphi_n$$

ψ_n et ψ_ℓ s'exprimant en fonction de φ_d , χ s'exprime en fonction de φ_d.
On peut donner la forme définitive de χ en fonction de ψ_n

$$\cos\chi = \frac{1}{\sin\theta_{cm}}\left[\gamma\cos\theta_{cm}\sin(\theta_g - \theta_{cm}) + \sin\theta_g\cos\psi_n - \cos\theta_n\sin(\theta_g - \theta_{cm})\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (A8)$$

A l'opposé de φ_n , il n'y a pas de possibilités de réduction des intervalles de variation de χ , en effet $\cos\chi$ dépend de $\theta_g - \theta_{cm}$. Ceci traduit le fait que $\vec{v}_n$ est fixe.

On vérifie que la formule donnant $\cos\chi$ répond à l'origine aux diverses configurations possibles $(\varphi_d = 0)$.

$$\varphi_n = 0 \qquad \cos\chi = \cos(\theta_g - \theta_{cm})\cos\psi_n + \sin(\theta_g - \theta_{cm})\sin\psi_n \qquad \chi = \left|(\theta_g - \theta_{cm}) - \psi_n\right|$$

$$\varphi_n = \pi \qquad \cos\chi = \cos(\theta_g - \theta_{cm})\cos\psi_n - \sin(\theta_g - \theta_{cm})\sin\psi_n \qquad \chi = \theta_g - \theta_{cm} + \psi_n$$

III. ETUDE DES VARIATIONS DE ψ_ℓ , ψ_n , E_n , χ EN FONCTION DE φ_d

Le domaine de variation choisi pour φ_d est $\left[0, \pi\right]$

Variation de γ

Pour les valeurs de E_n et de E_d choisies

$$E_n < 10 \text{ keV} \qquad 10 < E_d < 1 \text{ MeV}$$

on montre que $\gamma < 1$

III.a. Variation de ψ_ℓ

- Variation de $\psi_\ell(\varphi_d)$

De la formule (A6) nous tirons l'expression de la dérivée de ψ_ℓ en fonction de φ_d :

$$\frac{d\psi_\ell}{d\varphi_d} = \frac{\sin \theta_{cm} \sin \theta_n}{\sin \psi_\ell} \sin \varphi_d$$

$$= \sin \theta_{cm} \sin \theta_n \frac{\left(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \psi_n\right)^{1/2}}{\sin \psi_n} \sin \varphi_d$$

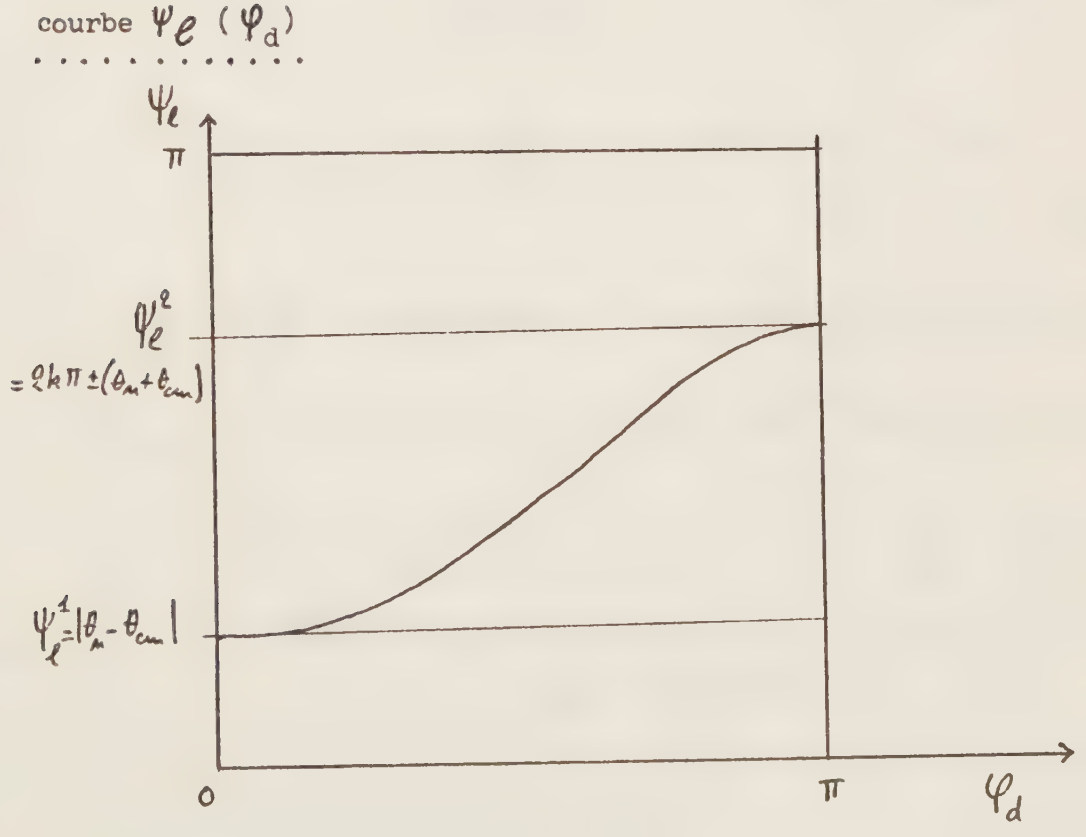


Figure A 2 : ψ_ℓ en fonction de φ_d

La formule donnant $\cos \psi_\ell$ est valable $\forall \theta_n$ et $\theta_{cm} \in \left[0 , \pi \right]$

φ_d	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{d\psi_\ell}{d\varphi_d}$	0	$+$		$+$	0
ψ_ℓ	ψ_ℓ^1	↗	$\text{Arccos}(\cos\theta_{cm}\cos\theta_n)$	↗	ψ_ℓ^2

Nous étudions les cas où $\varphi_d = 0$ et $\varphi_d = \pi$.

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi_\ell^1 &= \cos(\theta_n - \theta_{cm}) = \frac{E_1 - W_n(1-\gamma^2)}{2\gamma\sqrt{E_1 W_n}} \qquad \varphi_d = 0 \\ \cos\psi_\ell^2 &= \cos(\theta_n + \theta_{cm}) = \frac{E_2 - W_n(1-\gamma^2)}{2\gamma\sqrt{E_2 W_n}} \qquad \varphi_d = \pi \end{aligned}\right\} \quad (A9)$$

E_1 et E_2 sont les valeurs de E correspondant à ψ_ℓ^1 et ψ_ℓ^2

Les hypothèses sur θ_n , θ_{cm}, ψ_ℓ nous conduisent à :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_d = 0 \qquad \psi_\ell^1 &= \left| \theta_{cm} - \theta_n \right| \\ \varphi_d = \pi \qquad \psi_\ell^2 &= \left| 2k\pi - (\theta_n + \theta_{cm}) \right| \end{aligned}\right\} \quad (A10)$$

où

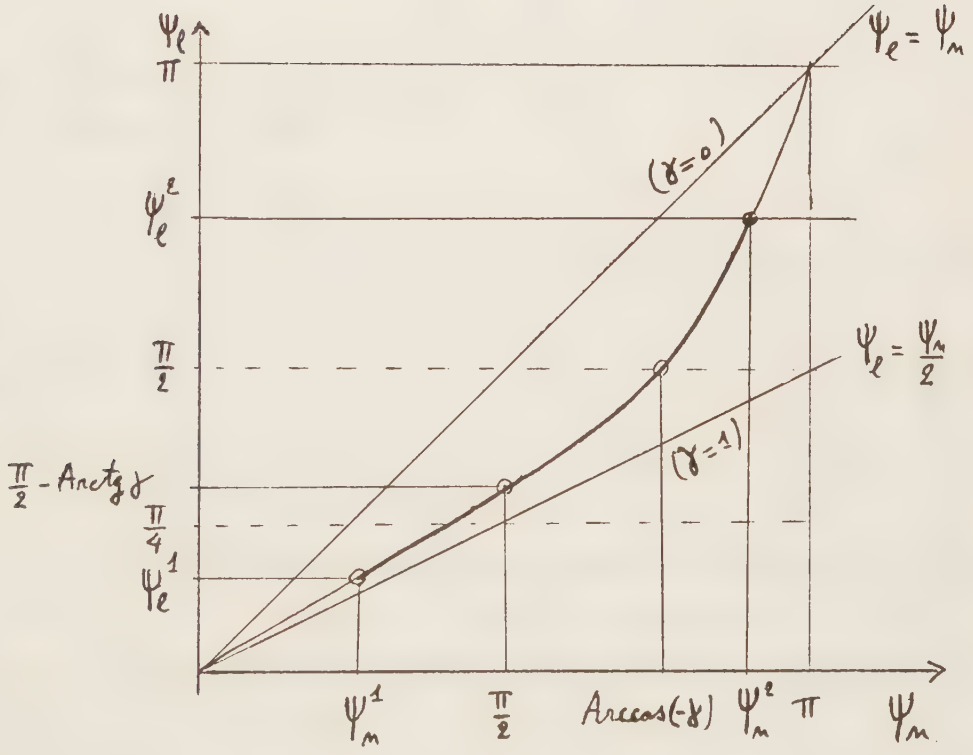
$$k = 0 \qquad 0 \leqslant \vartheta_n + \vartheta_{cm} \leqslant \pi$$

$$k = 1 \qquad \pi \leqslant \vartheta_n + \vartheta_{cm} \leqslant 2\pi$$

En définitive (fig. A 2).

$$0 \leqslant \varphi_\ell^1 \leqslant \varphi_\ell^2 \leqslant \pi$$

Courbe $\psi_\ell\ (\psi_n)$



$$0 \leq \psi_\ell \leq \psi_n \leq \pi$$

Figur. A 3 : ψ_ℓ en fonction de ψ_n

III.b. Variation de $\psi_n(\varphi_d)$

La formule (A 5) nous fournit l'expression de la dérivée de ψ_n en fonction de ψ_ℓ, puis en fonction de φ_d.

$$\frac{d\psi_n}{d\psi_\ell} = \frac{\left(1-\gamma^2\sin^2\psi_\ell\right)^{\frac{1}{2}} + \gamma\cos\psi_\ell}{\left(1-\gamma^2\sin^2\psi_\ell\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n}{1+\gamma\cos\psi_n}$$

$$\frac{d\psi_n}{d\varphi_d} = \sin\theta_{cm}\sin\theta_n \frac{\left(1-\gamma^2\sin^2\psi_\ell\right)^{\frac{1}{2}} + \gamma\cos\psi_\ell}{\sin\psi_\ell\left(1-\gamma^2\sin^2\psi_\ell\right)^{\frac{1}{2}}}\sin\varphi_d$$

$$= \sin\theta_{cm}\sin\theta_n \frac{\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n\right)^{\frac{3}{2}}}{\sin\psi_n\left(1+\gamma\cos\psi_n\right)}\sin\varphi_d$$

Compte tenu du fait que $\gamma < 1$, $\quad \psi_n \in \left[0\ ,\ \pi\right]$

φ_d	0				π
ψ_ℓ	ψ_ℓ^1		$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\,\gamma$	$\frac{\pi}{2}$	ψ_ℓ^2
$\frac{d\psi_\ell}{d\varphi_d}$		$+$		$+$	$+$
$\frac{d\psi_n}{d\psi_\ell}$		$+$		$+$	$+$
ψ_n	ψ_n^1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$ $\mathrm{Arccos}(-\gamma)$ $\nearrow$	ψ_n^2

Compte tenu des intervalles de variation de ψ_{ℓ} et de ψ_{n}, et de la formule (A 5) donnant ψ_{ℓ} en fonction de $\psi_{\ell n}$, on peut écrire :

$$\cos\psi_{n}^{1} = -\gamma \sin^2\psi_{\ell}^{1} + \cos\psi_{\ell}^{1}\left(1 - \gamma^2 \sin^2\psi_{\ell}^{1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\psi_{n}^{2} = -\gamma \sin^2\psi_{\ell}^{2} + \cos\psi_{\ell}^{2}\left(1 - \gamma^2 \sin^2\psi_{\ell}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

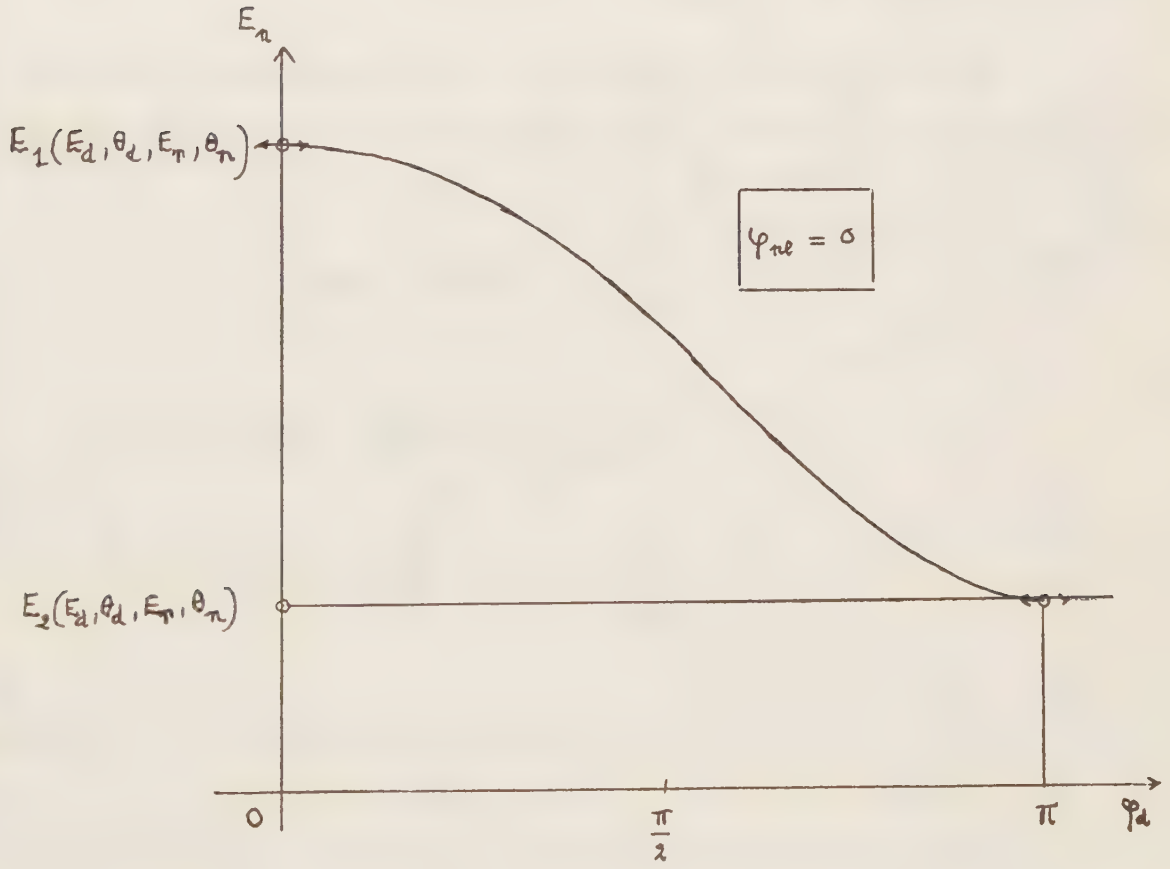


Fig. A 4 : Variation de E_n en fonction de $\varphi_d \in [0, \pi]$

En général (fig. A 3)

$$0 < \psi_n^1 < \psi_n^2 < \pi$$

on remarque également (évident par la géométrie)

$$0 \leqslant \psi_\ell \leqslant \psi_n < \pi$$

III.c. Variation de $E_n(\varphi_d)$ (cf. figure A4)

De la formule (A 4) nous tirons l'expression de la dérivée de E_n en fonction de ψ_n , puis de ψ_n en fonction de ψ_ℓ , puis de ψ_ℓ en fonction de φ_d .

$$\frac{dE_n}{d\psi_n} = -2\gamma W_n \sin\psi_n$$

$$= -2\gamma W_n \sin\psi_\ell \left[\left(1 - \gamma^2 \sin^2\psi_\ell\right)^{\frac{1}{2}} + \gamma\cos\psi_\ell \right]$$

$$\frac{dE_n}{d\varphi_d} = -2\gamma W_n \sin\theta_{cm} \sin\theta_n \frac{\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n\right)^{\frac{3}{2}}}{1+\gamma\cos\psi_n} \sin\varphi_d \qquad \text{(A11)}$$

φ_d	0		π
ψ_ℓ	ψ_ℓ^1	↗	ψ_ℓ^2
ψ_n	ψ_n^1	↗	ψ_n^2
$\frac{dE_n}{d\varphi_1}$	0	−	0
E_n	E_1	↘	E_2

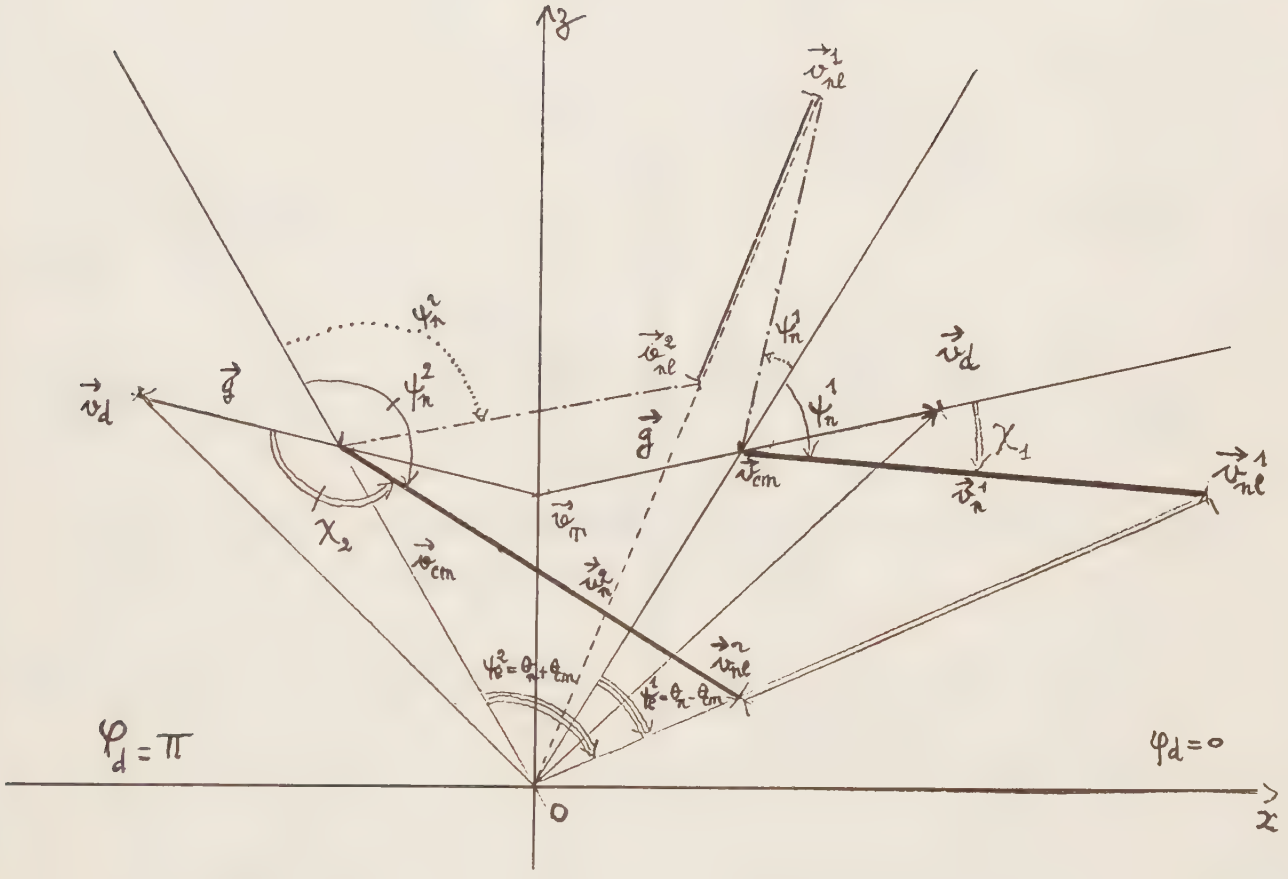


Fig. A 5 : Signification géométrique des variations de $\varphi_d \in [0, \pi]$

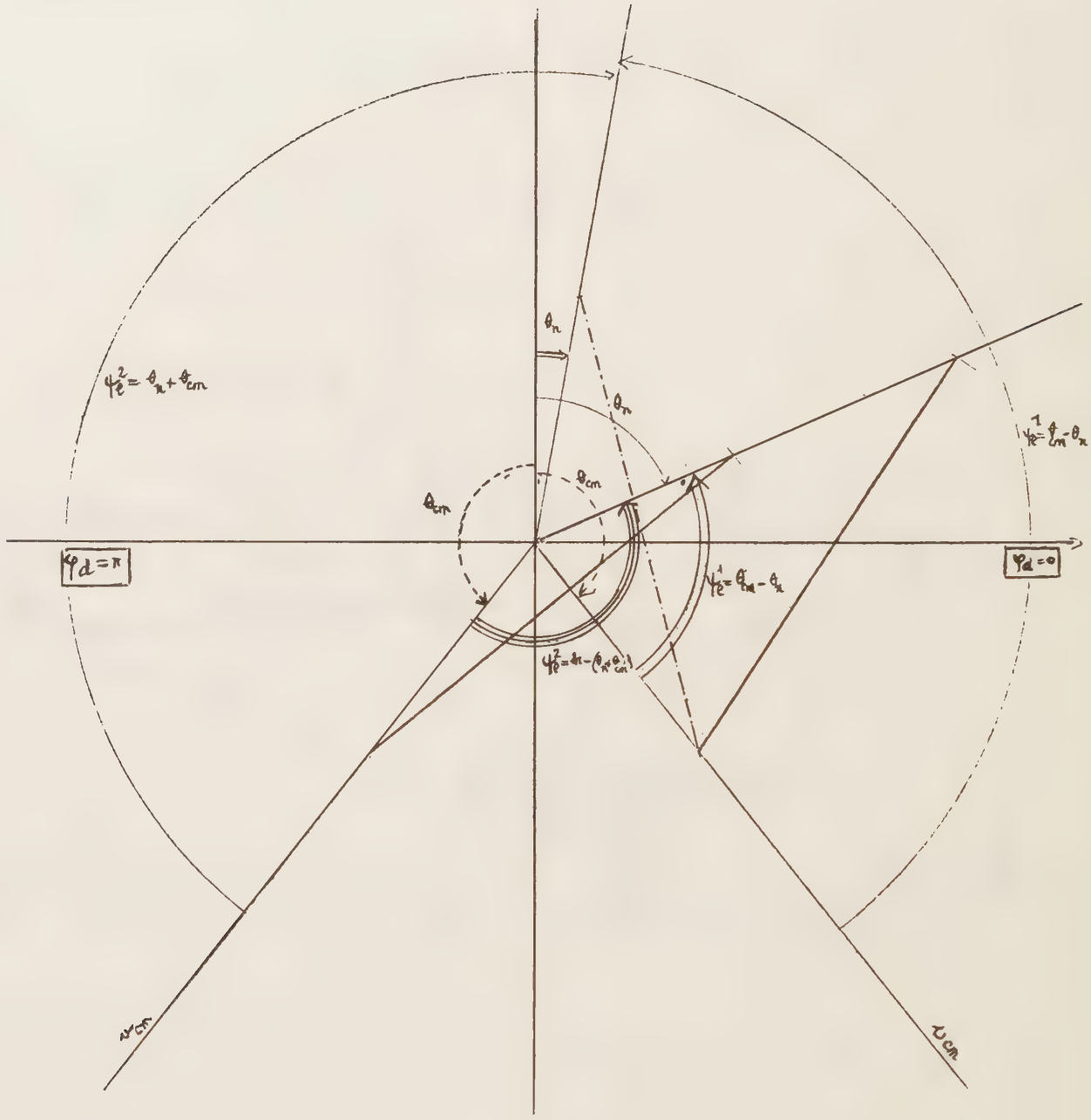


Fig. A 6 : Valeurs extrêmes de ψ_ℓ pour $\varphi_d = o$ et $\varphi_d = \pi$

De la formule (A 9) nous donnant ψ_ℓ^1 et ψ_ℓ^2 , nous déduisons E_1 et E_2, par le jeu des équations suivantes :

$$\cos\psi_n = \frac{E_n - W_n(1+\gamma^2)}{2\gamma W_n}$$

$$\cos\psi_\ell = \frac{\cos\psi_n + \gamma}{(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n)^{\frac{1}{2}}}$$

d'où on tire

$$\cos\psi_\ell = \frac{E_n - W_n(1-\gamma^2)}{2\gamma\sqrt{E_n W_n}}$$

Pour $\varphi_d = 0$ et $\varphi_d = \pi$ nous remplaçons ψ_ℓ et E_n par les valeurs respectives ψ_ℓ^1 et ψ_ℓ^2 , E_1 et E_2 (voir fig. A 5 et A 6) :

$$\cos(\theta_n - \theta_{cm}) = \cos\psi_\ell^1 = \frac{E_1 - W_n(1-\gamma^2)}{2\gamma\sqrt{E_1 W_n}}$$

$$\cos(\theta_n + \theta_{cm}) = \cos\psi_\ell^2 = \frac{E_2 - W_n(1-\gamma^2)}{2\gamma\sqrt{E_2 W_n}}$$

équations qui se mettent sous la forme :

$$E_1 - 2\gamma\sqrt{E_1 W_n}\cos(\theta_n - \theta_{cm}) - W_n(1-\gamma^2) = 0$$

$$E_2 - 2\gamma\sqrt{E_2 W_n}\cos(\theta_n + \theta_{cm}) - W_n(1-\gamma^2) = 0$$

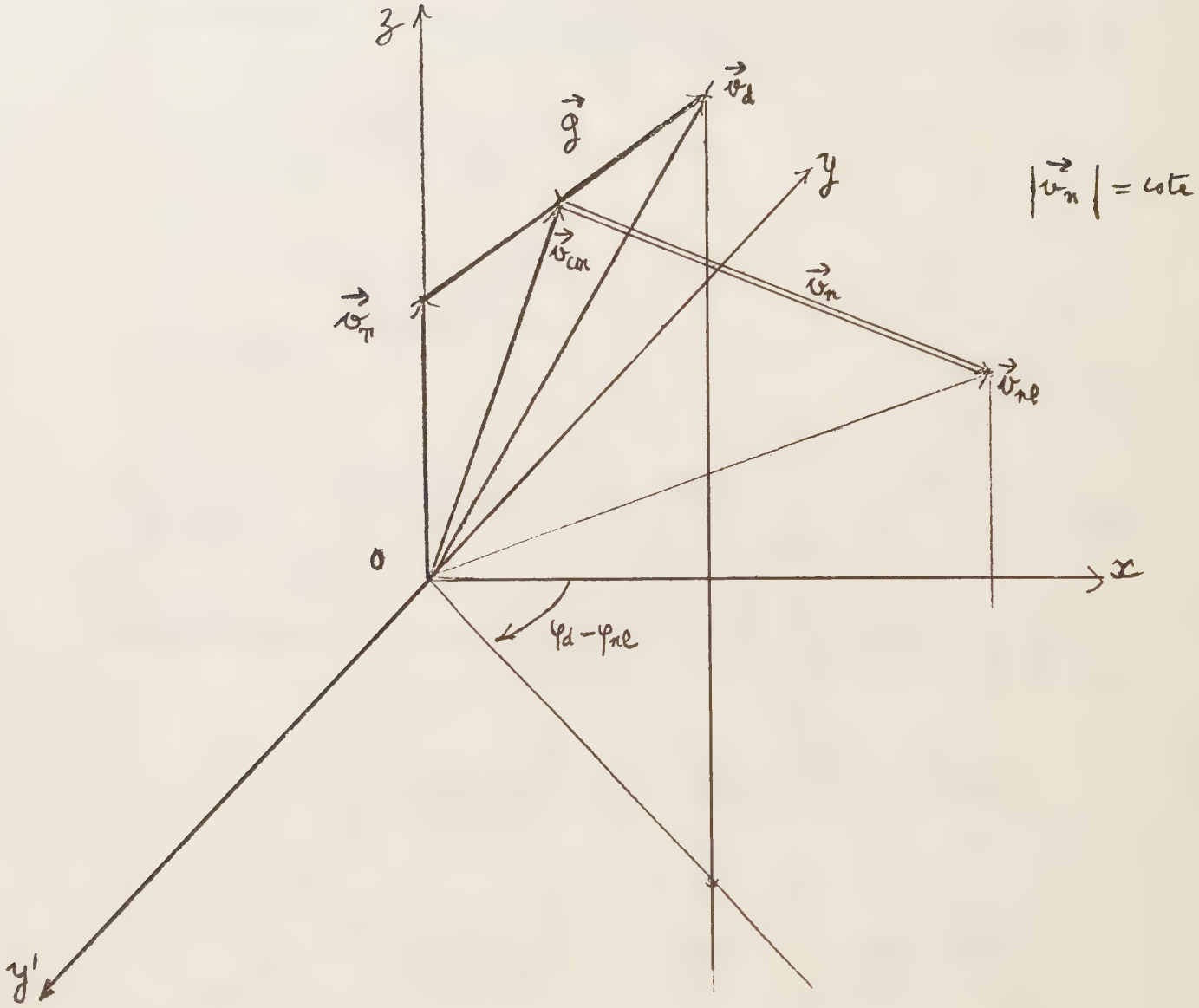


Fig. A 7 : Géométrie de la réaction (rappel)

et dont on prend les racines positives

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{E_1} &= \sqrt{W_n}\left[\gamma\cos(\theta_n-\theta_{cm})+\sqrt{1-\gamma^2\sin^2(\theta_n-\theta_{cm})}\right]\\ \sqrt{E_2} &= \sqrt{W_n}\left[\gamma\cos(\theta_n+\theta_{cm})+\sqrt{1-\gamma^2\sin^2(\theta_n+\theta_{cm})}\right]\end{aligned}\right\} \quad (A12)$$

$$E_1 = E_1(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$$

$$E_2 = E_2(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$$

De plus on a l'inégalité

$$E_2 \leqslant E_1$$

Enfin, si on veut exprimer E_2 et E_1 en fonction de $E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{8E_1} &= \sqrt{E_d}\left[\cos(\theta_n-\theta_d)+\rho\cos\theta_n\right]+\sqrt{6Q+3E_d(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d)-E_d\left[\sin(\theta_n-\theta_d)+\rho\sin\theta_n\right]^2}\\ \sqrt{8E_2} &= \sqrt{E_d}\left[\cos(\theta_n+\theta_d)+\rho\cos\theta_n\right]+\sqrt{6Q+3E_d(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d)-E_d\left[\sin(\theta_n+\theta_d)+\rho\sin\theta_n\right]^2}\end{aligned}\right\} \quad (A13)$$

III.d. Variation de $\chi\left(\varphi_d\right)$ (figure A7)

C'est l'étude la plus délicate, car, si pour ψ_e , ψ_n , et même φ_n , les variations ne font intervenir que $\vec{v}_{cm}$ et $\vec{v}_{ne}$, pour χ , on doit également faire intervenir $\vec{q}$. De la formule (A 8) nous déduisons :

$$\frac{d\chi}{d\psi_n} = \frac{\sin\psi_n}{\sin\theta_{cm}\sin\chi}\left[\sin\theta_q\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n\right)^{\frac{1}{2}}-\gamma\cos\theta_n\sin(\theta_q-\theta_{cm})\right]\frac{1}{\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n\right)^{\frac{1}{2}}}$$

On prend

$$0 \leqslant \chi \leqslant \pi$$

et on se ramène à l'étude du facteur :

$$\sin\theta_g \left(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\psi_n\right)^{\frac{1}{2}} - \gamma\cos\theta_n \sin(\theta_g - \theta_{cm})$$

qu'on peut encore écrire (en multipliant par $\sqrt{W_n}$)

$$\sin\theta_g \sqrt{E_n} - \gamma\sqrt{W_n}\cos\theta_n \sin(\theta_g - \theta_{cm})$$

$$= \sin\theta_g\left(\sqrt{E_n} - 2p\cos\theta_n\sqrt{\frac{E_d}{8}}\right) \quad = \sin\theta_g\left(\sqrt{E_n} - 2\sqrt{\frac{E_T}{8}}\cos\theta_n\right)$$

Cela revient à comparer E_n et $\frac{E_T}{2}\cos^2\theta_n$

Comme $E_n \in [E_2, E_1]$, cela revient à comparer E_2 et $\frac{E_T}{2}\cos^2\theta_n$

Physiquement il est évident que, si γ est petit devant 1 :

$$E_2 > \frac{E_T}{2}\cos^2\theta_n$$

On montre également par le calcul que cette condition est toujours réalisée pour

$$Q > 3E_d$$

En effet :

$$\sqrt{8E_2} = \sqrt{E_d}\left[\cos(\theta_n+\theta_d)+\rho\cos\theta_n\right] + \sqrt{6Q+3E_d\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)-E_d\left[\sin(\theta_n+\theta_d)+\rho\sin\theta_n\right]^2}$$

En partant de l'inégalité :

$$E_1 \geqslant E_n \geqslant E_2$$

on étudie un minorant de E_2.

On calcule la dérivée :

$$\frac{dE_2}{d\theta_n} = -\frac{\sqrt{2E_2}\sqrt{E_d}\sqrt{1+\rho^2+2\rho\cos\theta_d}\,\sin(\theta_n+\theta_{cm})}{\sqrt{6Q+3E_d\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)-E_d\left[\sin(\theta_n+\theta_d)+\rho\sin\theta_n\right]^2}}$$

le signe de la dérivée est celui de $-\sin(\theta_n+\theta_{cm})$ et en particulier le minimum est obtenu pour :

$$\theta_n+\theta_{cm} = \pi$$

Un calcul rapide nous donne

$$\sin(\theta_n+\theta_d)+\rho\sin\theta_n = 0$$

$$\cos(\theta_n+\theta_d)+\rho\cos\theta_n = -\left(1+\rho^2+2\rho\cos\theta_d\right)^{\frac{1}{2}}$$

En définitive :

$$\sqrt{8E_2} \geqslant -\sqrt{E_d\left(1+\rho^2+2\rho\cos\theta_d\right)} + \sqrt{6Q+3E_d\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)}$$

Un minorant de cette nouvelle quantité est obtenu pour $\theta_d = 0$

$$\sqrt{8E_2} \geqslant -\sqrt{E_d}\left(1+\rho\right) + \sqrt{6Q+3E_d(1-\rho)^2}$$

et pour $\rho = 1$

$$\sqrt{8E_2} \geqslant -2\sqrt{E_d} + \sqrt{6Q}$$

si $Q > 3E_d$ (E_d peut atteindre le MeV)

$$\sqrt{E_2} \geqslant \sqrt{E_d}\,\frac{3-\sqrt{2}}{2}$$

$$E_2 \geqslant \frac{E_d}{2} > \frac{E_T}{2}\cos^2\vartheta_n$$

ce que nous avons précisément supposé.

L'ensemble de ces résultats se résume dans le tableau ci-dessous et la figure A 6.

φ_d	0		π
υ_n	ψ_n^1		ψ_n^2
$\frac{d\chi}{d\psi_n}$		+	
χ	χ^1	→	χ^2

IV. CAS PARTICULIERS.

Il est évident, d'après la formule (A 6), que ψ_ℓ ne dépend pas de φ_d pour $\vartheta_n = 0\,,\ \pi$.

Il en sera de même pour ψ_n , E_n , χ et donc σ_d .

ANNEXE B

ETUDE DETAILLEE DE S_{f1} POUR $\theta \neq 0, \pi$.

Nous rappelons que, dans le cas général, l'intégrale à calculer s'écrit (formule (16)) :

$$S_{f1}(E_T, E, \theta_n, \varphi_{nl}) = n_d n_T \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi} d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_n) \int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_T, \theta_n, \varphi_{nl}) \delta(E - E_T) d\varphi_d$$

nous remarquons que nos diverses quantités E_n et σ_d^1 ne dépendent pas de φ_{nl} puisque nous avons pris $\varphi_{nl} = 0$

$$S_{f1}(E_T, E, \theta_n) = n_d n_T \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi} d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_n) \int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_T, \theta_n) \delta(E - E_n) d\varphi_d \quad (B1)$$

I. CALCUL COMPLET DE $\int_0^{2\pi} \sigma_d^1 \delta(E - E_n) d\varphi_d$. ETUDE DE FONCTION.

Des considérations antérieures (formule (17)) nous ont permis d'écrire une formule d'égalité entre distributions

$$\int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_n, \theta_n) \delta(E - E_n) d\varphi_d = \sum_i \left[\frac{\sigma_d^1}{\left| \frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d} \right|} \right]_{\varphi_d = \varphi_d^i(E)}$$

où les $\varphi_d^i(E)$ sont toutes les racines de l'équation

$$E = E_n(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n)$$

De l'étude de la fonction $E_n(\varphi_d)$ nous en déduisons que dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, elle présente deux intervalles de monotonie. Elle parcourt donc deux fois son intervalle de variation $[E_2, E_1]$

Pour

$$E \in [E_2, E_1]$$

il existe donc deux solutions de cette équation, que nous appelons $\varphi_d^+(E)$ et $\varphi_d^-(E)$ puisqu'elles sont du type cosinus. Dans cet intervalle de E nous pouvons écrire

$$\int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n)\, \delta(E - E_n)\, d\varphi_d = \left[\frac{\sigma_d^1}{\left|\frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d}\right|}\right]_{\varphi_d = \varphi_d^+(E)} + \left[\frac{\sigma_d^1}{\left|\frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d}\right|}\right]_{\varphi_d = \varphi_d^-(E)}$$

De l'étude de $E_n(\varphi_d)$, nous voyons que les deux solutions de l'équation comprises entre o et 2π , soient $\varphi_d^+(E)$ et $\varphi_d^-(E)$ sont telles que l'on ait :

$$\varphi_d^-(E) = 2\pi - \varphi_d^+(E)$$

Les quantités σ_d^1 et E_n ne changeant pas quand on change $\varphi_d^+(E)$ en $\varphi_d^-(E)$, nous en tirons la forme définitive de l'intégrale en φ_d :

$$\int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n)\, \delta(E - E_n)\, d\varphi_d = 2\left[\frac{\sigma_d^1}{\left|\frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d}\right|}\right]_{\varphi_d = \varphi_d^+(E)} \qquad \text{(B2)}$$

En effet $\frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d}$ change de signe quand on change de solution, mais nous ne considèrons que le module .

Lorsque

$$E \notin \left[E_2 , E_1 \right]$$

nous écrirons

$$\int_0^{2\pi} \sigma_d^1 (E_d, \theta_d, \varphi_d, E_n, \theta_n) \delta(E - E_n) d\varphi_d = 0$$

L'intégrale $\int_0^{2\pi} \sigma_d^1 \delta(E - E_n) d\varphi_d$ est donc une fonction de E , nulle en dehors de l'intervalle $\left[E_2, E_1\right]$ et égale, dans cet intervalle, à :

$$2 \left[\frac{\sigma_d^1}{\left| \frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d} \right|} \right]_{\varphi_d = \varphi_d^+(E)}$$

Pour terminer le calcul de cette fonction, il nous faut remplacer la variable φ_d dans σ_d^1 et $\left| \frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d} \right|$ par la variable E ,

$$\sigma_d^1 (E_d, \theta_d, \varphi_d, E_n, \theta_n) = \frac{\sigma_T}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi + B\cos^4\chi}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\left(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\psi_n\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + \gamma\cos\psi_n}$$

$$\left| \frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d} \right| = 2\gamma W_n \tan\theta_{cm} \sin\theta_n \frac{\left(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\psi_n\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + \gamma\cos\psi_n} \sin\varphi_d$$

c'est-à-dire calculer ψ_n , χ en fonction de E . Or :

$$E - E_n = W_n \left(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\psi_n\right)$$

La chaîne donnant χ et E_n en fonction de φ_d étant constituée de la manière suivante :

$$\varphi_d \longrightarrow \psi_\ell \longrightarrow \psi_n \longrightarrow E_n = E$$
$$\psi_n \longrightarrow \chi$$

nous la remonterons suivant le schéma

$$E \longrightarrow \psi_n^E \longrightarrow \psi_\ell^E \longrightarrow \varphi_d^E$$
$$\psi_n^E \longrightarrow \chi^E$$

En définitive :

$$\cos\psi_n^E = \frac{E - W_n(1+\gamma^2)}{2\gamma W_n}$$

$$\cos\chi^E = \frac{1}{\sin\theta_{cm}}\left[\gamma\cos\theta_{cm}\sin(\theta_\ell - \theta_{cm}) + \sin\theta_\ell\cos\psi_n^E - \cos\theta_n\sin(\theta_\ell - \theta_{cm})\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n^E\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Si enfin, nous posons :

$$\delta^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) = \int_0^{2\pi} \sigma_d^{-1}(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n)\,\delta(E - E_n)\,d\varphi_d$$

nous pourrons écrire

Si $$E \in \left[E_2, E_1\right]$$

$$\delta^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) = \frac{\sigma_\pi}{4\pi}\cdot\frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}}\cdot\frac{1}{\gamma W_n \sin\theta_{cm}\sin\theta_n\sin\varphi_d^E}$$

où

$$\varphi_d^E = \varphi_d^+(E)$$

$$\cos\varphi_d^E = \frac{\dfrac{E - W_n(1-\gamma^2)}{2\gamma\sqrt{EW_n}} - \cos\theta_{cm}\cos\theta_n}{\sin\theta_{cm}\sin\theta_n}$$

ce qui justifie les formules (28) et (29)

si $$E \notin [E_2, E_1]$$

$$\delta^*(E_d, \theta_d, E_n, E, \theta_n) = 0$$

Enfin remarquons que dans les cas

$$E = E_1 \qquad \varphi_d = 0$$

$$E = E_2 \qquad \varphi_d = \pi$$

nous sommes précisément dans les cas où notre formule sur les distributions n'est plus applicable et, en effet, la fonction δ^* présente deux points à l'infini en ces points.

Par convention nous prendrons $\delta^* = 0$ pour $E = E_1, E_2$

L'étude des branches infinies de δ^* nous montrera que l'intégrale en θ_d est convergente.

Physiquement la signification de ces points à l'infini est claire : elle est donnée par la nouvelle expression de la section efficace différentielle qui intervient dans le spectre, et que nous appellerons section efficace généralisée $\sigma_d^1 \delta(E - E_n)$

La distribution des deutérons en φ peut être prise égale à 1, on a donc pour 1 x $d\varphi_d$ deutérons incidents, $\sigma_d^1 \times \delta(E - E_n) \times d\varphi_d$ neutrons émis. Si on se situe en un point non singulier de la fonction E_n, la fonction δ est bien nulle sauf en un point, donc en intégrant sur un intervalle $\Delta\varphi_d$

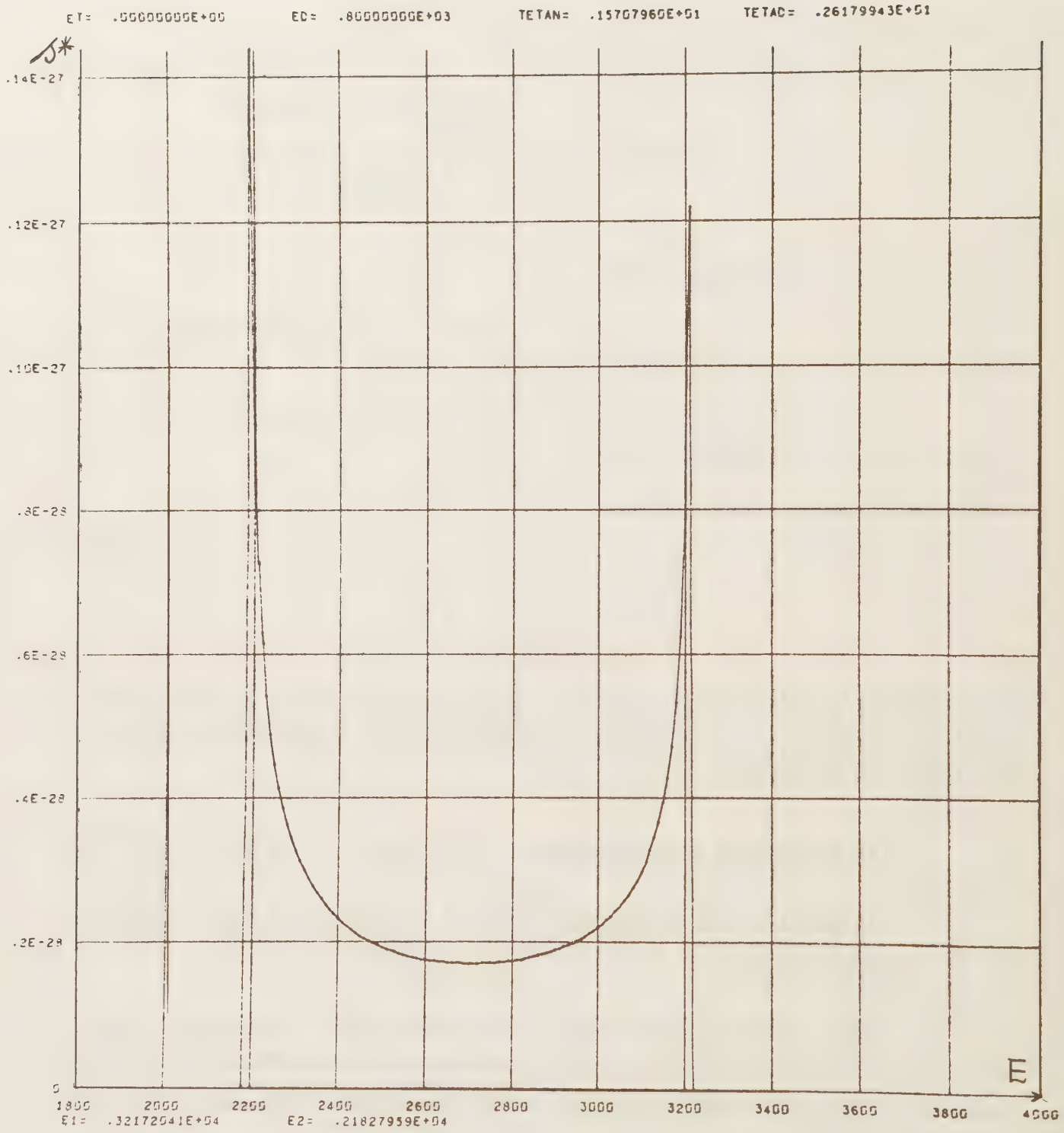


Fig. B 1 : $\delta^*\left(800, \frac{5\pi}{6}, 0, E, \frac{\pi}{2}\right)$

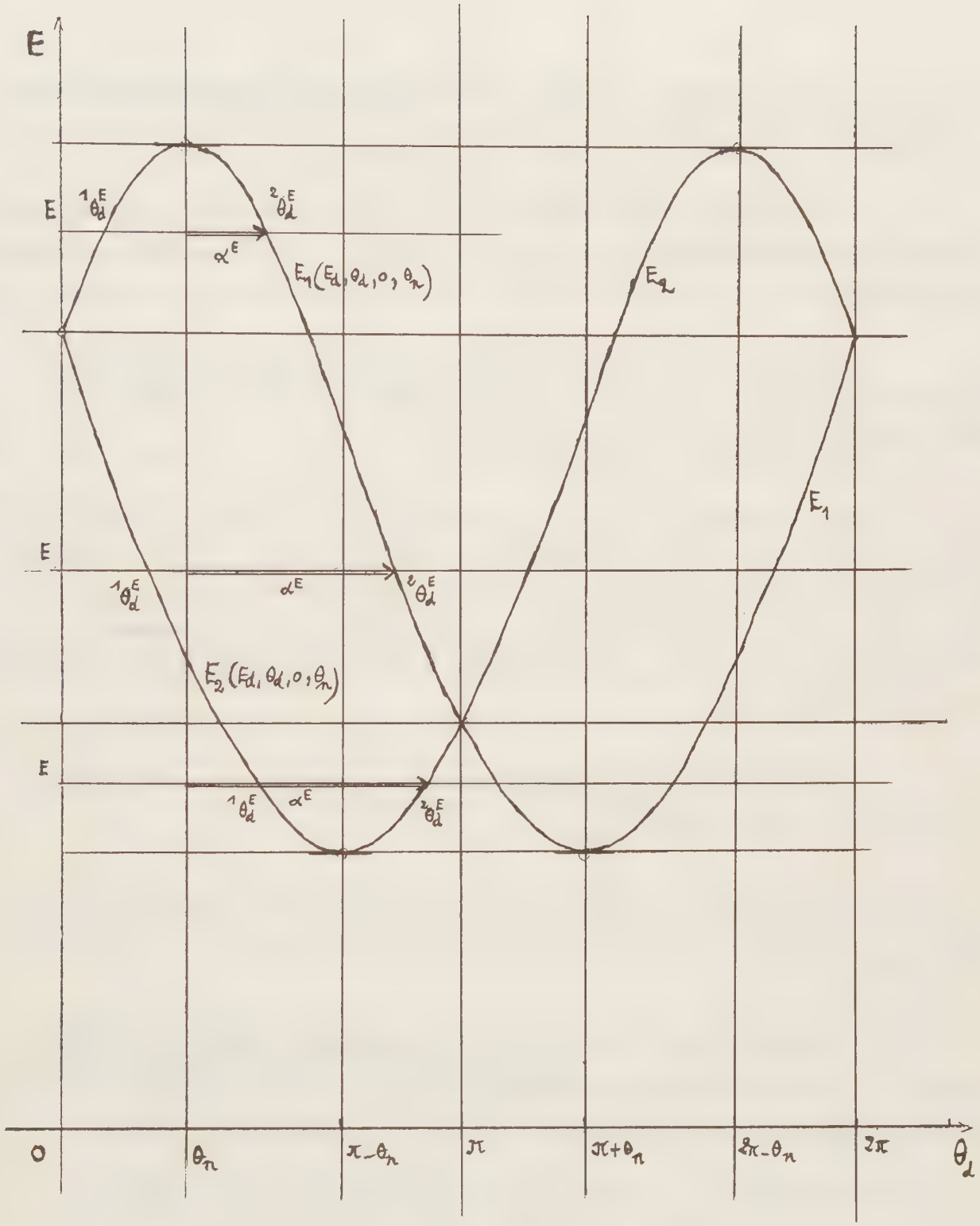


Fig. B 2 a.: E_1 et E_2 en fonction de θ_d, pour $E_T = 0$, E_d et θ_d fixés

on obtient bien une intégrale finie. Ceci veut dire que l'on obtient un nombre fini de neutrons émis autour de φ_d dans $d\varphi_d$.

Si par contre, on considère un point singulier de E_n, on peut dire en première approximation que $\delta(E - E_n)$ n'est plus nul en un point, mais sur un intervalle fini, le nombre de neutrons émis est infini.

Ces points à l'infini doivent disparaître dès que l'intégration en φ_d aura été réalisée, puisque l'intégrale obtenue doit bien évidemment être finie après intégration en θ_d et en E_d.

Dans l'intégrale S_{f1}, la fonction $S^*(E_d, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$ est la seule des trois fonctions f^1, g, S^* à présenter des points singuliers. Il est nécessaire d'étudier ses variations en fonction de θ_d pour réaliser l'intégration, à E fixé. Par ailleurs sa signification de spectre élémentaire correspondant à une injection conique, à E_d et θ_d fixés, nous amène à étudier ses variations en fonction de E.

$S^*(E_d, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$ est une courbe en forme de $\cup$ aussi bien en θ_d qu'en E (cf. figure B1).

A θ_d fixé, en E, $S^*(E_d, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$ est déterminé par ses deux asymptotes $E_2(E_d, \theta_d, E_T, \theta_n)$ et $E_1(E_d, \theta_d, E_T, \theta_n)$. Ce couple d'asymptotes évolue avec θ_d.

A E fixé, en θ_d, S^* est aussi déterminée comme nous le montrerons par la suite par ses deux asymptotes ${}^1\theta_d(E_d, E_T, E, \theta_n)$ et ${}^2\theta_d(E_d, \theta_d, E_T, \theta_n)$ que nous appellerons plus simplement ${}^1\theta_d^E$ et ${}^2\theta_d^E$ (figure B2a) avec

$$0 \leqslant {}^1\theta_d^E \leqslant {}^2\theta_d^E \leqslant \pi$$

Déterminer les asymptotes en θ_d , cela revient à étudier l'intersection des courbes $\rho^*(E_d, \theta_d, E_n, E, \theta_n)$, en fonction de la variable E , avec une droite d'abscisse E donnée, quand on les fait varier en fonction du paramètre θ_d . Plus précisément il s'agit d'étudier le cas où le point d'intersection se trouve à l'∞ ; les valeurs de θ_d répondant à la question sont les solutions de l'équation

$$\left(E - E_2 \right)\left(E - E_1 \right) = 0$$

Les θ_d^E sont donc toutes les solutions situées dans l'intervalle $[0, \pi]$ des 2 équations (A 9) à E fixé.

$$E = E_2$$

$$E = E_1$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\cos\left(\theta_n + \theta_{cm}\right) = \frac{E - W_n\left(1-\gamma^2\right)}{2\gamma\sqrt{W_n E}}$$

$$\cos\left(\theta_n - \theta_{cm}\right) = \frac{E - W_n\left(1-\gamma^2\right)}{2\gamma\sqrt{W_n E}}$$

θ_{cm}, W_n, γ sont des fonctions de $\cos\theta_d$ et de $\sin\theta_d$. Quand on les remplace par leur valeur, on obtient les deux équations :

$$\left.\begin{aligned} E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}\left(1+\rho^2\right) - \rho\cos\theta_n\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} &= \cos\theta_d\left(\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\cos\theta_n - E_d\rho\right) - \sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\sin\theta_n\sin\theta_d \\ E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}\left(1+\rho^2\right) - \rho\cos\theta_n\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} &= \cos\theta_d\left(\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\cos\theta_n - E_d\rho\right) + \sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\sin\theta_n\sin\theta_d \end{aligned}\right\} \quad (B3)$$

Pour procéder à la résolution de ces équations, nous faisons le changement de variable classique

$$t = tg\frac{\theta_d}{2}$$

la condition $\theta_d \in [0, \pi]$ entraînant $t \geqslant 0$.

Nous avons à chercher les racines positives d'une équation de la forme :

$$(at^2 + bt + c)(at^2 - bt + c) = 0$$

Les deux trinômes du second degré ont des racines deux à deux opposées et le même discriminant :

$$D(E_d, E_r, E, \theta_n) = \frac{1}{2}E_d E \sin^2\theta_n - \left[E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}(1+\rho^2) - \rho\cos\theta_n\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\right]^2 + \left(\cos\theta_n\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho\right)^2 \quad (B4)$$

En définitive cette équation du quatrième degré a deux racines positives en t , dans le cas général et deux racines négatives. Il y a deux valeurs ${}^1\theta_d^E$ et ${}^2\theta_d^E$ solutions de l'équation $(E - E_1)(E - E_2) = 0$.

Les racines doubles correspondent aux valeurs de E qui annulent $D(E_d, E_r, E, \theta_n)$. Le trinôme du second degré en t s'écrit :

$$t^2\left[E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}(1+\rho^2) - \rho\cos\theta_n\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} + \cos\theta_n\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho\right] - 2t\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\sin\theta_n + \left[E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}(1+\rho^2) - \cos\theta_n(1+\rho)\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\right]$$

II. <u>ETUDE DU 1er ETAGE D'INTEGRATION (INTEGRATION EN θ_d)</u>.

Il s'agit de calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_r) S^*(E_d, \theta_d, E_r, E, \theta_n)$$

où

$$\mathcal{S}^*(E_d, \theta_d, E_\pi, \Xi, \theta_n) = \frac{\sigma_\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^\Xi + B\cos^4\chi^\Xi}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{1}{\gamma W_n \sin\theta_{cm} \sin\theta_n \sin\varphi_d^\Xi}$$

nous poserons

$$S^*(E_d, E_\pi, \Xi, \theta_n) = \int_0^\pi f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_\pi)\, \mathcal{S}^*(E_d, \theta_d, E_\pi, \Xi, \theta_n) \sin\theta_d \, d\theta_d \quad (B5)$$

Remarque préliminaire : la forme analytique de $\mathcal{S}^*$ fait apparaître deux points singuliers en plus des précédents, en $\theta_d = 0, \pi$. Pour éviter cette difficulté, nous supposons la fonction f^1 identiquement nulle dans des intervalles très petits, autour de 0 et π et nous sommes ramenés à l'étude d'une intégrale de la forme

$$\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} f^1 g \mathcal{S}^* \sin\theta_d \, d\theta_d$$

Cette simplification sera justifiée plus tard dans le calcul numérique.

II.a. Intégration en θ_d à E_d donné.

L'étude du paragraphe précédent a montré que la fonction $\mathcal{S}^*$ de θ_d était nulle en dehors de l'intervalle $\left]{}^1\theta_d^\Xi \, , \, {}^2\theta_d^\Xi\right[$ et qu'elle tendait vers l'∞ quand θ_d tend ces deux bornes.

L'intégration numérique se fait en prenant l'intersection du support de f^1 et du support de $\mathcal{S}^*$, si bien que dans le cas général, nous aurons à calculer

$$\int_{{}^1\theta_d^\Xi}^{{}^2\theta_d^\Xi} f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_\pi)\, \mathcal{S}^*(E_d, \theta_d, E_\pi, \Xi, \theta_n) \sin\theta_d \, d\theta_d .$$

Enfin, il faut étudier la convergence de l'intégrale au voisinage de ses bornes.

Ceci a pu être réalisé analytiquement de la manière suivante : ρ^* est donné définitivement par l'application de la formule (26) et le calcul des quantités $\cos\psi_n^E$, $\cos\varphi_d^E$, g , θ_{cm} , γ , W_n .

Connaissant $\cos\varphi_d^E$ on peut en déduire $\sin\varphi_d^E$ par la formule usuelle ($0 \leqslant \varphi_d^E \leqslant \pi$) et on obtient pour ρ^* la formule analytique suivante :

$$\rho^*(E_d, \theta_d, E_n, E, \theta_n) = \frac{6\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{2E^{\frac{1}{2}}}{W_n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{E_1}-\sqrt{E}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{E}+\sqrt{E_1'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{E}-\sqrt{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{E}+\sqrt{E_2'}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\sqrt{E_1}$ et $\sqrt{E_2}$ sont les quantités étudiées précédemment, $-\sqrt{E_1'}$ et $-\sqrt{E_2'}$ sont les quantités conjuguées. L'étude des points à l'infini se ramène à l'étude de la quantité :

$$\left(\sqrt{E_1} - \sqrt{E}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{E} - \sqrt{E_2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Cette étude ne peut maintenant être menée à bien qu'en étudiant plus complètement, en fonction de θ_d , les courbes E_1 et E_2 .

II.b. Etude de E_1 et de E_2 en fonction de θ_d

θ_n joue le rôle d'un paramètre, E_d et ρ sont fixés.

Nous étudions le problème dans le cas le plus général où $E_\pi \neq 0$ c'est-à-dire $\rho \neq 0$.

Il existe deux méthodes pour étudier les variations de E_1 et de E_2 en fonction de θ_d : la première consiste à étudier les dérivées de ces

quantités, la seconde à étudier l'intersection de ces courbes avec une parallèle à l'axe des θ_d . Ce dernier problème a été déjà partiellement résolu dans le paragraphe précédent : il se ramène à l'étude de $D(E_d, E_\pi, E, \theta_n) \geqslant 0$ pour E_d, E_π et θ_n fixés, c'est une équation du quatrième degré en $\sqrt{E}$.

II.b. α . Etude de $E_1(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$ et de $E_2(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$ en fonction de θ_d.

$$y_1(\theta_d, \theta_n) = \sqrt{8E_1} = \sqrt{E_d}\left[\cos(\theta_n - \theta_d) + \rho\cos\theta_n\right] + \sqrt{6Q + 3E_d(1+\rho^2 - 2\rho\cos\theta_d) - E_d\left[\sin(\theta_n - \theta_d) + \rho\sin\theta_n\right]^2}$$

$$y_2(\theta_d, \theta_n) = \sqrt{8E_2} = \sqrt{E_d}\left[\cos(\theta_n + \theta_d) + \rho\cos\theta_n\right] + \sqrt{6Q + 3E_d(1+\rho^2 - 2\rho\cos\theta_d) - E_d\left[\sin(\theta_n + \theta_d) + \rho\sin\theta_n\right]^2}$$

nous sommes amenés à faire un certain nombre de remarques préliminaires :

- On peut remplacer l'étude de E_1 ou de E_2 par celle de y_1 ou y_2, puisque

$$\frac{dy_1}{d\theta_d} = 2^{\frac{1}{2}} E_1^{-\frac{1}{2}} \frac{dE_1}{d\theta_d}$$

- y_1 et y_2 sont des fonctions périodiques de θ_d de période 2π .
- on remarque que :

$$y_2(\theta_d, \theta_n) = y_1(-\theta_d, \theta_n) = y_1(2\pi - \theta_d, \theta_n)$$

$$0 \leqslant \theta_d \leqslant \pi$$

De l'égalité ci-dessus on déduit que la variation de y_2 dans l'intervalle $[0, \pi]$ se déduit de la variation de y_1 dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ par symétrie par rapport à l'axe $\theta_d = \pi$.

Cette remarque nous dispense d'une étude séparée de E_2 et d'autre part nous oblige à étudier $y_1(\theta_d, \theta_n)$ dans l'intervalle $\theta_d \in [0, 2\pi]$.

On rappelle l'inégalité

$$E_1 \geqslant E_2$$

l'égalité n'étant obtenu qu'en $\theta_d = 0 , \pi$.

- Les courbes $y_1(\theta_d, \theta_n)$ et $y_2(\theta_d, \theta_n)$ formant un réseau possédant les propriétés :

$$y_2(\theta_d, \theta_n) = y_1(2\pi - \theta_d, \theta_n)$$

$$y_2(\theta_d, \pi - \theta_n) = y_1(2\pi - \theta_d, \pi - \theta_n)$$

On posera

$$y_3(\theta_d, \theta_n) = y_1(\theta_d, \pi - \theta_n)$$

$$y_4(\theta_d, \theta_n) = y_1(2\pi - \theta_d, \pi - \theta_n) = y_2(\theta_d, \pi - \theta_n)$$

Ecrivons la dérivée de y_1

$$\frac{\partial y_1}{\partial \theta_d}(\theta_d, \theta_n) = \sqrt{E_d}\sin(\theta_n - \theta_d) + \frac{3E_d\rho\sin\theta_d + E_d\cos(\theta_n - \theta_d)\left[\sin(\theta_n - \theta_d) + \rho\sin\theta_n\right]}{\sqrt{6Q + 3E_d(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta_d) - E_d\left[\sin(\theta_n - \theta_d) + \rho\sin\theta_n\right]^2}}$$

De même en posant $\theta'_d = 2\pi - \theta_d$, nous pouvons écrire

$$-\frac{dy_1(2\pi - \theta_d, \theta_n)}{d\theta_d} = \frac{dy_1}{d\theta'_d}(2\pi - \theta_d, \theta_n) = -\frac{dy_2}{d\theta_d}(\theta_d, \theta_n)$$

$$\frac{dy_1}{d\theta_d}(2\pi - \theta_d, \pi - \theta_n) = \frac{dy_2}{d\theta_d}(\theta_d, \pi - \theta_n)$$

En définitive l'étude de la dérivée consiste à rechercher les racines de l'équation :

$$\frac{dy_1}{d\theta_d}(\theta_d, \theta_n) = 0 \qquad \begin{array}{ll} \text{variable} & \theta_d \in \left[0, 2\pi\right] \\ \text{paramètre} & \theta_n \in \left[0, \pi\right] \end{array}$$

Pour résoudre cette équation, nous multiplions $\frac{dy_1}{d\theta_d}$ par sa quantité conjuguée qui, en vertu des remarques précédentes, est :

$$-\frac{dy_1}{d\theta_d}(2\pi - \theta_d, \pi - \theta_n)$$

nous aboutissons à l'équation :

$$\Gamma(\theta_d, \theta_n) = \frac{dy_1}{d\theta_d}(\theta_d, \theta_n)\frac{dy_1}{d\theta_d}(2\pi - \theta_d, \pi - \theta_n) = \frac{dy_1}{d\theta_d} \cdot \frac{dy_4}{d\theta_d}(\theta_d, \theta_n) = 0$$

La fonction $y_1(\theta_d, \theta_n)$ est une fonction définie, continue et dérivable sur l'intervalle compact $\left[0, \pi\right]$. Sa dérivée étant non nulle en 0 et π s'annule au moins une fois dans $\left]0, \pi\right[$. De même entre π et 2π.
$\Gamma(\theta_d, \theta_n)$ a donc 4 racines dans l'intervalle $\left[0, 2\pi\right]$

En posant

$$t = \operatorname{tg}\frac{\theta_d}{2} \qquad \theta_d \in \left[0, 2\pi\right]$$

nous pouvons écrire Γ sous la forme d'une équation du 4e degré :

$$\left.\begin{aligned} & t^4\left[6Q + 2E_d(1+\rho^2+4\rho)\right]\sin^2\theta_n + t^3\left[6Q + 2E_d(1+3\rho^2+2\rho)\right]4\sin\theta_n\cos\theta_n \\ & + t^2\left[\left\{6Q + E_d(2+3\rho^2)\right\}4\cos^2\theta_n - \left\{6Q + 2E_d(1+8\rho^2)\right\}2\sin^2\theta_n - 36E_d\rho^2\right] \\ & - t\left[6Q + 2E_d(1+3\rho^2-2\rho)\right]4\sin\theta_n\cos\theta_n + \left[6Q + 2E_d(1+\rho^2-4\rho)\right]\sin^2\theta_n = 0 \end{aligned}\right\} \text{(B6)}$$

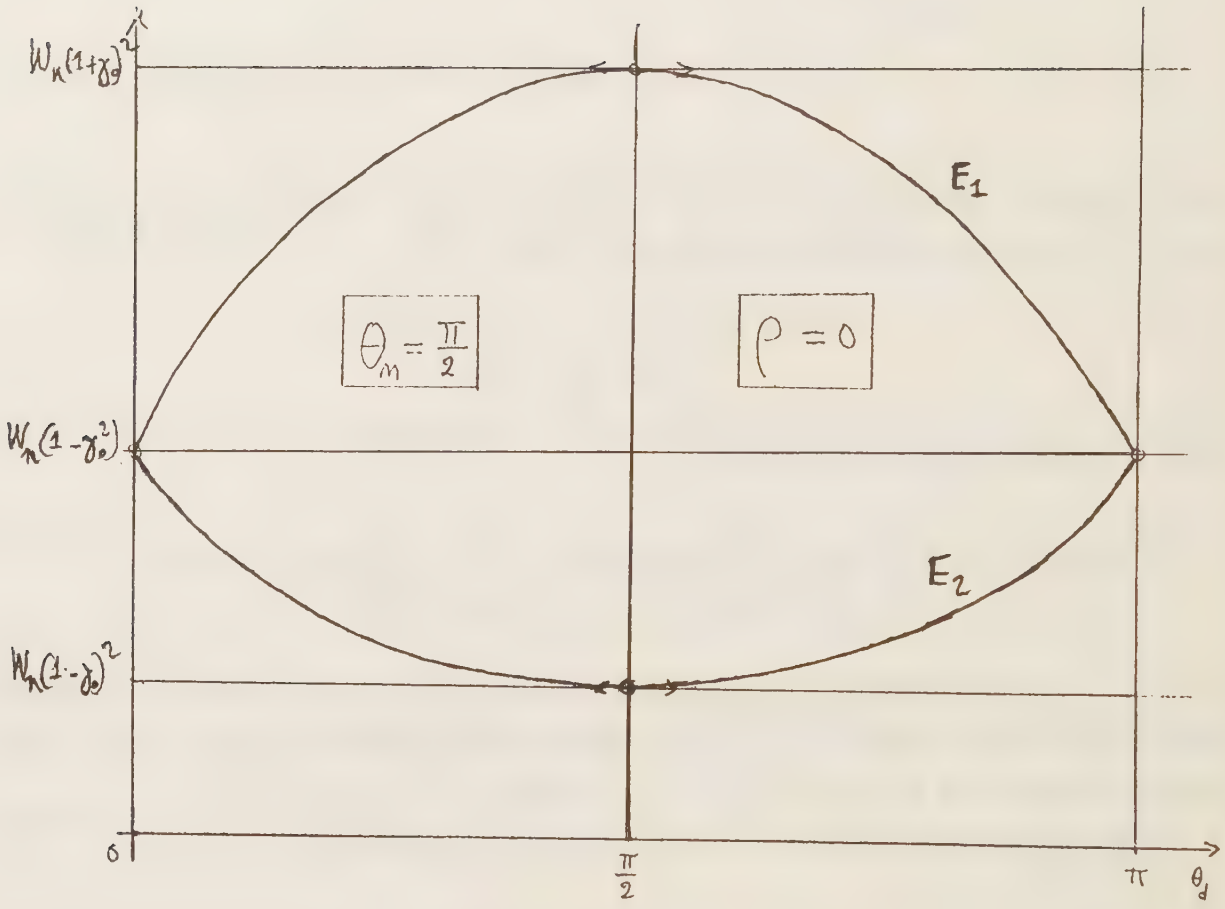


Fig. B 2 b : E_1 et E_2 en fonction de θ_d, pour $E_T = 0$, $\theta_n = \frac{\pi}{2}$

On remarque enfin que

$$\Gamma(\theta_d, \theta_n) = \Gamma(2\pi - \theta_d, \pi - \theta_n)$$

En définitive nous pouvons dresser le tableau suivant de la résolution de cette équation :

$\rho = 0$	$\theta_n = \frac{\pi}{2}$	4 racines 2 à 2 confondues
$\rho = 0$	$\theta_n \neq \frac{\pi}{2}$	4 racines 2 à 2 confondues
$\rho \neq 0$	$\theta_n = \frac{\pi}{2}$	4 racines 2 à 2 opposées
$\rho \neq 0$	$\theta_n \neq \frac{\pi}{2}$	4 racines distinctes

En effet dans le cas $\rho = 0$, les racines en θ_d sont θ_n et $\pi + \theta_n$ comme on peut le voir facilement sur l'équation.

Pour $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ et $\rho \neq 0$, on a une équation bicarrée dont les racines sont bien 2 à 2 opposées (cf. fig. B2a et B2b).

L'étude précédente nous a donné les abscisses des quatre extremums correspondant aux courbes y_1 et y_4 .

II.b. β. Etude de E_1, E_2 par le discriminant.

L'étude des ordonnées nous est donnée par l'étude du discriminant $D(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$ des équations (B 3).

Ce discriminant peut s'écrire, en posant :

$$x = \sqrt{E}$$

$$\widetilde{D}(E_d, E_\pi, x, \theta_n) =$$

$$-x^4 + 2\rho\sqrt{\frac{E_d}{2}}\cos\theta_n x^3 + x^2\left[\frac{3}{2}Q + \frac{E_d}{2}\left(2+\rho^2\sin^2\theta_n\right)\right] - x\rho\cos\theta_n\sqrt{\frac{E_d}{2}}\left[\frac{3}{2}Q + \frac{E_d}{2}\left(5+\rho^2\right)\right] + E_d^2\rho^2 - \left[\frac{3}{4}Q + \frac{E_d}{4}\left(1+\rho^2\right)\right]^2 \quad (B7)$$

A cela s'ajoute la remarque :

$$\widetilde{D}(E_d, E_\pi, -x, \pi - \theta_n) = \widetilde{D}(E_d, E_\pi, x, \theta_n)$$

et on recherche les solutions de l'équation écrite sous la forme :

$$\widetilde{D}(E_d, E_\pi, x, \theta_n) = 0$$

Cette remarque, nous permet d'affirmer que si nous prenons $0 \leqslant \theta_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, nous en déduisons les solutions de l'équation dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta_n \leqslant \pi$ en prenant les racines opposées en x.

Par des considérations simples sur les sommes et les produits des racines nous en déduisons que dans le cas $\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\widetilde{D}(E_d, E_\pi, x, \theta_n)$ a deux racines négatives et deux racines positives en x et donc, qu'on peut écrire $D(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$ sous la forme :

$$D(E_d, E_\pi, E, \theta_n) = -\left(\sqrt{E} - \sqrt{{}^1E}\right)\left(\sqrt{E} - \sqrt{{}^2E}\right)\left(\sqrt{E} + \sqrt{{}^3E}\right)\left(\sqrt{E} + \sqrt{{}^4E}\right)$$

où ${}^1E$, ${}^2E$, ${}^3E$, ${}^4E$ sont des nombres positifs fonctions de E_d, E_π et θ_n.

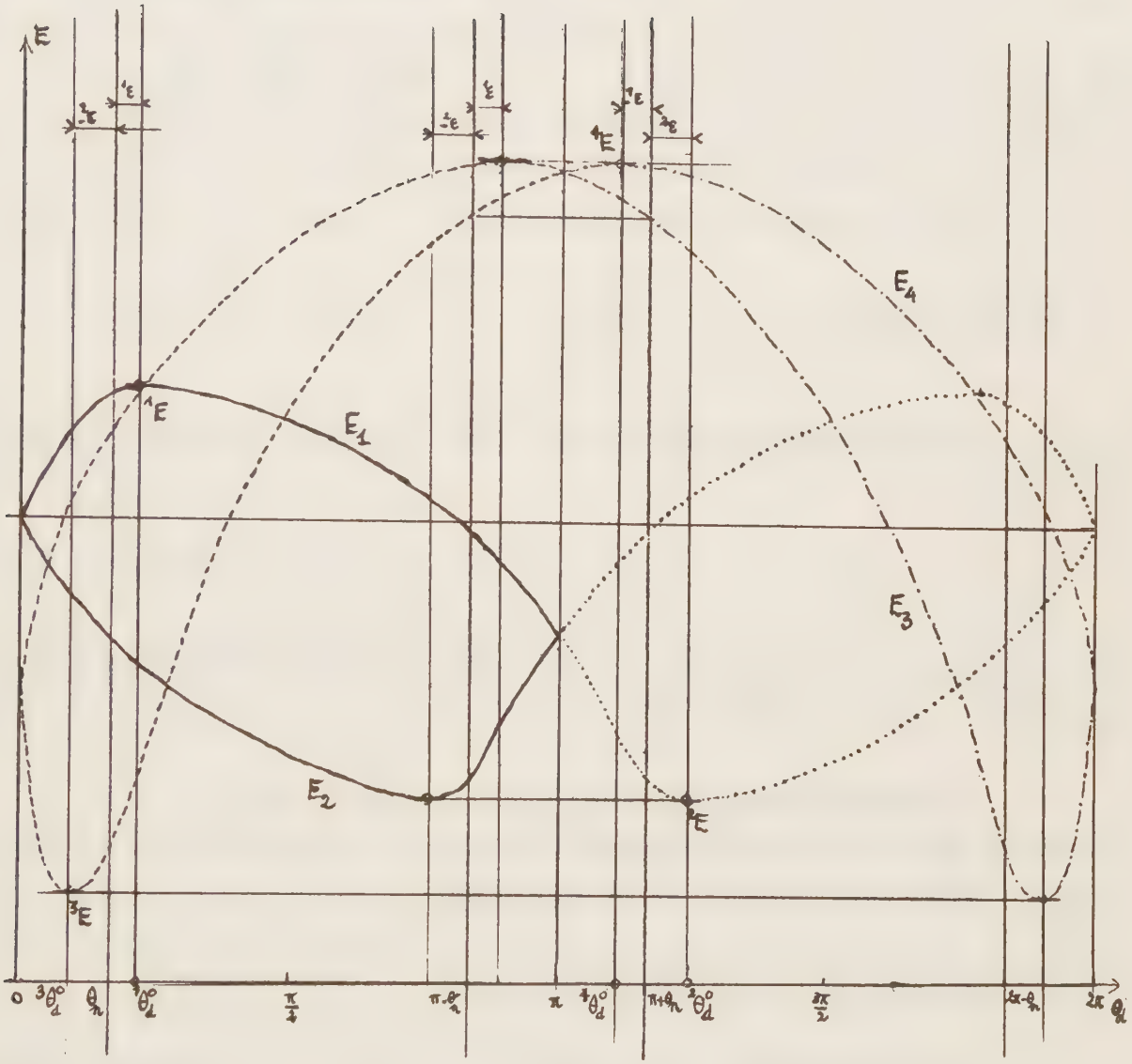


Fig. B 3 : E_1, E_2, E_3, E_4 en fonction de θ_d

Si maintenant nous prenons $\frac{\pi}{2} < \theta'_n < \pi$ et si nous posons :

$$\theta'_n = \pi - \theta_n \quad \text{avec} \quad \theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathcal{D}(E_d, E_\pi, E, \theta'_n) = \mathcal{D}(E_d, E_\pi, E, \pi - \theta_n) = -\left(\sqrt{E} + \sqrt{{}^1E}\right)\left(\sqrt{E} + \sqrt{{}^2E}\right)\left(\sqrt{E} - \sqrt{{}^3E}\right)\left(\sqrt{E} - \sqrt{{}^4E}\right)$$

D'où l'organisation des solutions en E suivant les valeurs de θ_n

$$\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad E = {}^1E \quad \text{ou} \quad E = {}^2E$$

et ces valeurs correspondent aux valeurs ${}^1\theta_d^\circ$ et ${}^2\theta_d^\circ$ attachées à $y_1(\theta_d, \theta_n)$ dans $\Gamma(\theta_d, \theta_n)$

$$\theta_n \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \qquad E = {}^3E \quad \text{ou} \quad E = {}^4E$$

et ces valeurs correspondent aux valeurs ${}^3\theta_d^\circ$ et ${}^4\theta_d^\circ$ attachées à $y_4(\theta_d, \theta_n)$ dans $\Gamma(\theta_d, \theta_n)$ (cf. figure B3).

On voit facilement que pour $\rho = 0$ ou $\rho \neq 0$, $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ on obtient une équation bicarrée, donc 4 racines 2 à 2 opposées. Les courbes y_1 et y_4 ont même valeur du maximum et du minimum.

II.c. Etude de $\mathcal{S}^*$: intégration en θ_d.

En définitive dans l'intervalle $\left[0, \pi\right]$ de θ_d, E_1 présente un maximum que nous appellerons $\sup_{\theta_d} E_1$ et E_2 un minimum que nous appellerons $\inf_{\theta_d} E_2$

E_1 et E_2 sont égaux en $\theta_d = 0, \pi$.

Le domaine d'intégration en θ_d est donc celui délimité par les courbes E_2 et E_1 dans l'intervalle $\left[0, \pi\right]$

L'intersection des frontières de ce domaine et d'une droite parallèle aux abscisses θ_d correspondant à E donné, nous donne l'intervalle $\left]{}^1\theta_d^E\,,\,{}^2\theta_d^E\right[$ à l'intérieur duquel $S^*(E_d,\theta_d,E_r,E,\theta_n)$ est différent de zéro. Les contributions à $S^*(E_d,E_r,E,\theta_n)$ en dehors de cet intervalle sont nulles.

E varie en parcourant l'intervalle $\left[\underset{\theta_d}{\text{Inf}}\ E_2\ ,\ \underset{\theta_d}{\text{Sup}}\ E_1\right]$ à l'intérieur duquel S^* est différent de zéro et à l'extérieur duquel S^* est nul.

$$E \in \left[\underset{\theta_d}{\text{Inf}}\ E_2\ ,\ \underset{\theta_d}{\text{Sup}}\ E_1\right] \qquad S^*(E_d,E_r,E,\theta_n) \neq 0$$

$$E \notin \left[\underset{\theta_d}{\text{Inf}}\ E_2\ ,\ \underset{\theta_d}{\text{Sup}}\ E_1\right] \qquad S^*(E_d,E_r,E,\theta_n) = 0$$

- Etude du cas $E \in \left]\underset{\theta_d}{\text{Inf}}\ E_2\ ,\ \underset{\theta_d}{\text{Sup}}\ E_1\right[$

Il s'agit d'étudier la limite de

$$S'^* = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{{}^1\theta_d^E + \varepsilon}^{{}^2\theta_d^E - \varepsilon} f^1 g\, S^* \sin\theta_d\, d\theta_d$$

Cette étude peut se ramener à l'étude de la convergence de l'intégrale :

$$\int_{{}^1\theta_d^E + \varepsilon}^{\alpha} \lambda\mu\nu\, \frac{d\theta_d}{\left(\theta_d - {}^1\theta_d^E\right)^{\frac{1}{2}}}$$

où λ, μ, ν sont des fonctions non singulières de θ_d , α est un nombre fixé proche de ${}^1\theta_d^E$. La convergence de cette intégrale est facile à étudier. On montre qu'elle converge et on peut en déduire une majorante du reste au voisinage de l'asymptote ${}^1\theta_d^E$. De même pour ${}^2\theta_d^E$ /12/.

- Etude du cas $E = \inf_{\theta_d} E_2 \; ; \; \sup_{\theta_d} E_1$

Dans ce cas on a

$$\theta_d^0 = {}^2\theta_d^E = {}^1\theta_d^E$$

On montre également que l'intégrale converge /12/.

On étudie cette convergence sous la forme

$$S^*(E_d, E_\pi, \sup_{\theta_d} E_1, \theta_n) = \lim_{E \longrightarrow \sup_{\theta_d} E_1} \int_{{}^1\theta_d^E}^{{}^2\theta_d^E} f^1 g \, S^* \sin\theta_d \, d\theta_d$$

III. ETUDE DU 2e ETAGE D'INTEGRATION (INTEGRATION EN E_d).

Des considérations précédentes, on déduit facilement que la courbe définie par la relation (B4), à E_π et θ_n fixés :

$$D(E_d, E_\pi, E, \theta_n) = 0$$

est la courbe représentative des deux fonctions $\sup_{\theta_d} E_1$ et $\inf_{\theta_d} E_2$, quand on les trace en fonction de E_d . L'inégalité

$$D(E_d, E_\pi, E, \theta_n) \geqslant 0$$

définit donc cette fois le domaine d'intégration de $S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$.

Nous avons à calculer :

$$S_{f^1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n) \quad \text{(B8)}$$

III.a. Domaine d'intégration.

C'est l'étude du domaine $\mathcal{D}(E_d, E_\pi, E, \theta_n) \geq 0$

L'étude de ce domaine a été déjà partiellement réalisée puisque nous en avons étudié les frontières $\mathcal{D} = 0$.

Nous pouvons écrire

$$^1E = \sup_{\theta_d} E_1$$

$$^2E = \inf_{\theta_d} E_2$$

si $\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Pour l'étude de l'intégrale en E_d, c'est maintenant le problème inverse qui se pose : quand on se donne E et évidemment E_π et θ_n, quelle est la valeur de E_d correspondant à

$$\mathcal{D}(E_d, E_\pi, E, \theta_n) = 0$$

C'est-à-dire quelles sont les limites de l'intervalle en E_d, sur lequel S^* n'est pas nul.

Si on pose

$$z = \sqrt{\frac{E_d}{2}}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(2z^2, E_\pi, x, \theta_n) =$$

$$-\frac{z^4}{4} + z^2\left[2x^2 - 5x\sqrt{\frac{E_\pi}{2}}\cot\theta_n - \left(\frac{3}{4}Q - \frac{7E_\pi}{4}\right)\right] - \left[x^2 - x\sqrt{\frac{E_\pi}{2}}\cot\theta_n - \left(\frac{3}{4}Q + \frac{E_\pi}{4}\right)\right]^2 \qquad (B9)$$

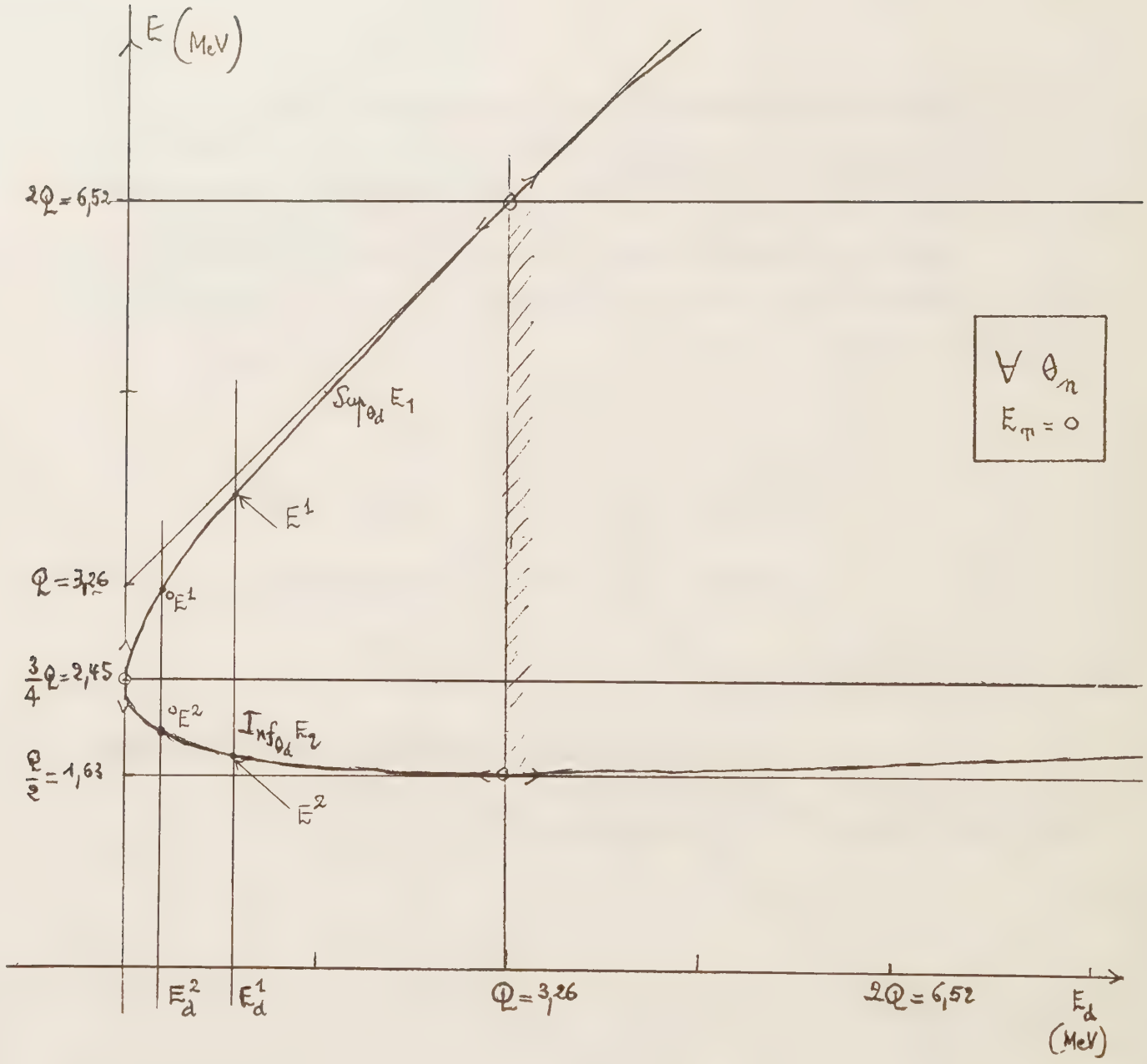


Fig. B 4 : $\underset{\theta_d}{\text{Sup}}\, E_1$ et $\underset{\theta_d}{\text{Inf}}\, E_2$, $E_T = 0$, $\forall\, \theta_n$

$\tilde{\mathcal{D}} = 0$ est une équation du second degré en E_d . On montre maintenant facilement après construction de la courbe $\mathcal{D} = 0$, que pour E_d^1 faible devant $\mathcal{Q}$ et $E_d^2 \ll E_d^1$, le domaine délimité par cette courbe et par les droites $E_d = E_d^2$ et $E_d = E_d^1$ possède les propriétés suivantes :

- une parallèle à E_d coupe toujours le domaine suivant la droite E_d^1
- une parallèle à E_d coupe le domaine soit suivant la droite $E_d = E_d^2$ soit suivant $\mathcal{D} = 0$, ce qui donne une valeur de E_d que nous appellerons E_d^E.

Nous dirons que S^* est différent de zéro sur un segment $\left[E_d^{min}, E_d^1 \right]$ où

$$E_d^{min} = Inf \left(E_d^E , E_d^2 \right)$$

et on peut écrire

$$S_{f1} \left(E_\pi, E, \theta_n \right) = n_d n_\pi \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} S^* \left(E_d, E_\pi, E, \theta_n \right) \frac{(2E_1)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} dE_d$$

III.b. Domaine de variation (cf. figure B4 à $E_\pi = 0$)

- Domaine de variation de $S_{f1} \left(E_\pi, E, \theta_n \right)$

Des considérations précédentes il résulte que les valeurs extrêmes de E , que nous appellerons E^2 et E^1 et qui sont telles que :

$$E^1 = \underset{E_d, \theta_d}{Sup} E_1 = \underset{E_d}{Sup} {}^1E$$

$$E^2 = \underset{E_d, \theta_d}{Inf} E_1 = \underset{E_d}{Inf} {}^2E$$

sont données par l'équation

$$\mathcal{D}\left(E_d^1, E_\pi, E, \theta_n\right) = 0$$

En définitive

$$E \in \left[\underset{E_d, \theta_d}{\text{Inf}}\ E_2 \,,\ \underset{E_d, \theta_d}{\text{Sup}}\ E_1 \right] \qquad S_{f1}\left(E_\pi, E, \theta_n\right) \neq 0$$

$$E \notin \left[\underset{E_d, \theta_d}{\text{Inf}}\ E_2 \,,\ \underset{E_d, \theta_d}{\text{Sup}}\ E_1 \right] \qquad S_{f1}\left(E_\pi, E, \theta_n\right) = 0$$

- Variation de $S\left(E_\pi, E, \theta_n\right)$ en fonction de E.

Déterminer la forme de la courbe représentative des variations de S_{f1} en fonction de E pour une valeur de f^1 correspondant à une injection isotrope, est un point essentiel si on veut avoir une idée des résultats donnés par le modèle.

Pour l'instant, c'est une opération que nous ne savons pas encore réaliser analytiquement.

Le calcul machine nous permettra d'avoir la forme du spectre, dans ce cas :

$$f^1\left(E_d, \theta_d\right) = \frac{1}{}$$

La fonction à étudier devient alors

$$S_1\left(E_\pi, E, \theta_n\right) = \int_{E_d^1}^{E_d^2} n_d n_\pi \, dE_d \, \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_{\theta_d^1}^{\theta_d^2} d\theta_d \sin\theta_d \, q \, S^*\left(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n\right)$$

La fonction $S^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$ est une fonction difficile à manier. Cependant dans le cas $E_\pi = 0$, nous montrerons qu'on peut réaliser analytiquement son étude complète.

IV. CALCUL DU FLUX.

Nous savons que le flux peut s'écrire sous la forme (14) :

$$\Phi_{f1}(E_\pi, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_\pi) \int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n) d\varphi_d \qquad (B10)$$

Par ailleurs le spectre s'écrit :

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_\pi) \int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n) \delta(E - E_n) d\varphi_d$$

$$= n_d n_\pi \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_{\theta_d^E}^{2\theta_d^E} f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_\pi) S^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) \sin\theta_d d\theta_d$$

On a montré que cette intégrale avait un sens, $S^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$ étant une fonction en particulier de E (et non plus de φ_d comme σ_d^1), qu'on peut écrire sous une forme analytique dans le domaine où elle n'est pas nulle, et qui possède deux branches infinies. La fonction $f^1 g S^*$ est intégrable en θ_d.

Enfin, on sait qu'entre Φ_{f1} et S_{f1} existe la relation (8)

$$\Phi_{f1}(E_\pi, \theta_n) = \int_{E^2}^{E^1} S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) dE$$

E^2 et E^1 sont, on le sait, les deux racines de l'équation (formule (B4))

$$\mathcal{D}(E_d^1, E_T, E, \theta_n) = 0$$

Connaissant S_{f^1} et E_d^1 on peut donc en déduire le flux théorique correspondant.

IV.a. Calcul de E_d^1

- Obtention de E_d^1 connaissant E_{min}^{exp} et E_{max}^{exp} expérimentaux

La détermination de f^1 se fait à partir des spectres, par comparaison des spectres expérimentaux et des spectres théoriques.

Pour déterminer E_d^1, on résout l'équation

$$\mathcal{D}(E_d, E_T, E_{max}^{exp}, \theta_n) = 0$$

une seule valeur de E_d convient dans l'intervalle utile (< 1 MeV) soit E_d^1 cette valeur

On a évidemment .

$$E_{max}^{exp} = E^1$$

Le calcul de E^2 peut se faire en résolvant

$$\mathcal{D}(E_d^1, E_T, E, \theta_n) = 0$$

en sachant qu'une des racines est connue, c'est $E^1 = E^{exp}_{max}$, l'autre racine sera donc E^2 .

On a ainsi les deux extrémités de l'intervalle support de S_{f^1}.

- Comparaison à l'expérience.

Connaissant E_d^1 , il reste à déterminer E_d^2. Ce paramètre agit peu sur la forme du spectre, mais par contre, il intervient dans la valeur du flux. Nous le supposons ici déterminé (son influence sera étudiée plus tard).

Avec E_d^2 et E_d^1 , on a le support de f^1 et on peut chercher à déterminer f^1 . Il s'agit, théoriquement, connaissant les spectres expérimentaux $S_M(E, \theta_n)$, de résoudre en f^1 l'équation :

$$S_M(E, \theta_n) - \lambda(E, \theta_n) S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = 0$$

C'est une équation intégrale en f^1 .

$\lambda(E, \theta_n)$ est un facteur d'échelle, dépendant de la mesure neutronique. Il est bien évident que dans ce calcul, ce que nous allons déterminer c'est

$$\frac{S_{f1}}{n_d n_\pi} = U_{f^1}$$

IV.b. Calcul de $n_d n_\pi$.

Pour obtenir le produit $n_d n_\pi$, il faut ajouter à la mesure de spectre, une mesure de flux, qui nous donnera cette fois, un nombre de neutrons intégré en énergie.

De l'équation

$$\Phi_M(\theta_n) - \Phi_{f1}(E_\pi, \theta_n) = 0$$

dans laquelle on connaît tous les éléments, sauf $n_d n_\pi$ on peut déduire le produit en question.

ANNEXE C

ETUDE DETAILLEE DE S_{f1} POUR $\theta_n = 0, \pi$.

Nous rappelons que dans ces cas, la quantité ψ_ℓ , donc $\psi_n, E_n, \chi, \sigma_d^1$ ne dépendent plus de φ_d , ce qui géométriquement, est évident puisqu'on est dans l'axe.

Nous avons expliqué précédemment (paragraphe III.A.2.b.) que :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_d \sin\theta_d d\varphi_d f^1 g \sigma_d^1 \delta(E - E_n) = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta_d \sin\theta_d f^1 g \sigma_d^1 \delta(E - E_n)$$

Tous les calculs vont donc se faire en choisissant E_d ou θ_d comme nouveau paramètre de variation de σ_d^1 et E_n . Dans notre cas, nous avons choisi θ_d.

I. Résultats en $\theta_n = 0$. Démonstration des formules (31) et (32)

Remarquons que dans ce cas E_n devient

$$E_n = \frac{1}{8}\left[\left\{6Q + 3E_d\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right) - E_d \sin^2\theta_d\right\}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{E_d}\left(\cos\theta_d + \rho\right)\right]^2$$

Par ailleurs

$$\psi_\ell = \theta_{cm}$$

$$\cos\chi = \cos(\theta_g - \theta_{cm})\cos\psi_n - \sin(\theta_g - \theta_{cm})\sin\psi_n$$

car suivant la 2ème formule (32)

$$\chi = \psi_n + (\theta_g - \theta_{cm})$$

La relation entre ψ_ℓ et ψ_n reste inchangée.

Dans ce cas,

$$E_2 = E_1 = E_n$$

ce qui apparaît clairement quand on considère la forme $\sqrt{8E_n}$.

Les intégrales se réduisent à :

$$S^* = 2\pi\sigma_d^1\,\delta(E - E_n)$$

$$S^*(E_d, E_T, E, o) = 2\pi\int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d f^1 g\,\sigma_d^1\,\delta(E - E_n) = 2\pi\left[\sin\theta_d \frac{f^1 g\,\sigma_d^1}{\left|\frac{\partial E_n}{\partial\theta_d}\right|}\right]_{\theta_d = \theta_d^E}$$

où θ_d^E est la solution unique de l'équation :

$$E = E_n(E_d, \theta_d, E_T, \theta_n)$$

Or cette équation nous donne après réagencement des termes et élévation au carré:

$$\cos\theta_d^E = \frac{E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}(1+\rho^2) - \rho\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}}{\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho}$$

Comme $\theta_d^E \in [o\ \ \pi]$, on a bien une solution unique. C'est la 1ere formule (32)
La condition d'existence est :

$$\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}E_d E} - E_d\rho\right)^2 - \left[E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}(1+\rho^2) - \rho\sqrt{\tfrac{1}{2}E_d E}\right]^2 \geqslant o$$

ce qui s'écrit encore

$$D(E_d, E_\pi, E, o) \geqslant o$$

qui est la condition d'existence en E pour $\theta_n = o$.

Si on calcule $\frac{\partial E_n}{\partial \theta_d}$, on obtient :

$$\frac{\partial E_n}{\partial \theta_d} = \sqrt{\frac{E_n}{2}} \cdot \frac{\left[6Q + 3E_d(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d) - E_d \sin^2\theta_d\right]^{\frac{1}{2}} + \sqrt{E_d}\cos\theta_d - 3\sqrt{E_d}\rho}{\left[6Q + 3E_d(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d) - E_d\sin^2\theta_d\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(-\sqrt{E_d}\sin\theta_d\right)$$

Le calcul analytique complet de $S^*(E_d, E_\pi, E, o)$ aboutit à la formule (31)

$$S^*(E_d, E_\pi, E, o) = 2\pi f^1(E_d, \theta_d^E)\, g(E_d, \theta_3^E, E_\pi) \cdot \frac{6\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_o}$$

$$T_o = \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \left[-2\rho E_d E + \sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\left\{2Q + E_d(1+3\rho^2)\right\} - \rho E_d\left\{\frac{Q}{2} + \frac{E_d}{2}(1+\rho^2)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

L'étude de la dérivée $\frac{\partial E_n}{\partial \theta_d}$, nous montre que le numérateur de la fraction qui y figure est toujours positif pour

$$6Q - 4E_d > o$$

D'où le tableau de variation :

θ_d	o		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{\partial E_n}{\partial \theta_d}$	o	$-$		$-$	o
E_n	$\sup_{\theta_d} E_n$	$\searrow$		$\searrow$	$\inf_{\theta_d} E_n$

$$\sup_{\theta_d} \sqrt{8E_n} = \sqrt{E_d}(1+\rho) + \sqrt{6Q + 3E_d(1-\rho)^2}$$

$$\inf_{\theta_d} \sqrt{8E_n} = -\sqrt{E_d}(1+\rho) + \sqrt{6Q + 3E_d(1+\rho)^2}$$

Si maintenant on étudie le trinôme du second degré en $\sqrt{E}$: $\left[\sqrt{T_0}/\sqrt{3}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}E_d E} - E_d\rho\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ on constate que les deux valeurs extrêmes de E sont à l'intérieur de l'intervalle de ses racines et que ce trinôme est donc toujours positif dans l'intervalle de variation de E .

En conclusion

$$E \in \left[\inf_{\theta_d} E_n \, , \sup_{\theta_d} E_n\right]$$

$$S^*(E_d, E_\tau, E, o) = 2\pi f' g \cdot \frac{\sigma_\tau}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi + B\cos^4\chi}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_0}$$

$$E \notin \left[\inf_{\theta_d} E_n \, , \sup_{\theta_d} E_n\right]$$

$$S^*(E_d, E_\tau, E, o) \equiv 0$$

Enfin

$$S'_{f1}(E_\tau, E, o) = n_d n_\tau \int_{E_d^2}^{E_d^1} S^*(E_d, E_\tau, E, o) \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} dE_d$$

Le calcul de cette intégrale se fait sans difficulté puisque T_o ne s'annule pas dans l'intervalle de variation considéré plus haut.

Pour achever ce calcul il convient de calculer χ en fonction de θ_d^E ; on aboutit à :

$$\cos\chi^E = \left(1+\rho^2+2\rho\cos\theta_d^E\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d^E\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\psi_{1n}^E(1-\rho^2)-2\rho\sin\theta_d^E\sin\psi_n^E\right]$$

on obtient, en définitive:

$$E \in \left[\underset{\theta_d,E_d}{\mathrm{Inf}}\, E_n\,,\ \underset{\theta_d,E_d}{\mathrm{Sup}}\, E_n\right]$$

$$S_{f1}(E_\pi,E,0) = 2\pi\frac{n_d n_\pi}{(m_d)^{\frac{3}{2}}}\int_{E_d^2}^{E_d^1} f^1(E_d,\theta_d^E)\,g(E_d,\theta_d^E,E_\pi)(2E_d)^{\frac{1}{2}}\frac{\sigma_T}{4\pi}\cdot\frac{1+A\cos^2\chi^E+B\cos^4\chi^E}{1+\frac{A}{3}+\frac{B}{5}}\cdot\frac{\sqrt{8E}}{T_o}\,dE_d$$

$$E \notin \left[\underset{\theta_d,E_d}{\mathrm{Inf}}\, E_n\,,\ \underset{\theta_d,E_d}{\mathrm{Sup}}\, E_n\right]$$

$$S_{f1}(E_\pi,E,0) \equiv 0$$

II. RESULTATS EN $\theta_n = \pi$. DEMONSTRATION DES FORMULES (33) ET (34).

On présente sommairement les résultats essentiels :

$$\sqrt{8E_n} = -\sqrt{E_d}\left(\cos\theta_d+\rho\right)+\sqrt{6Q+3E_d\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)-E_d\sin^2\theta_d}$$

$$\underset{\theta_d}{\mathrm{Inf}}\sqrt{8E_n} = -\sqrt{E_d}\left(1+\rho\right)+\sqrt{6Q+3E_d(1-\rho)^2}$$

$$\underset{\theta_d}{\mathrm{Sup}}\sqrt{8E_n} = \sqrt{E_d}\left(1-\rho\right)+\sqrt{6Q+3E_d(1+\rho)^2}$$

On voit facilement qu'on passe de $\theta_n = 0$ à $\theta_n = \pi$ en changeant $\sqrt{E_d}$ en $-\sqrt{E_d}$ dans toutes les formules

$$\rho S_{fi}(E_\pi, E, \pi) = 2\pi \frac{n_d n_\pi}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_{E_d^2}^{E_d^1} f^1(E_d, \theta_d^E) g(E_d, \theta_d^E, E_\pi) (2E_d)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sigma_\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_\pi} \, dE_d$$

$$T_\pi = \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} + E_d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \left[2\rho E_d E + \sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\left\{2Q + E_d(1+3\rho^2)\right\} + \rho E_d\left\{\frac{Q}{2} + \frac{E_d}{2}(1+\rho^2)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta_d^E = \frac{E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}(1+\rho^2) + \rho\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}}{-\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho}$$

$$\chi^E = \psi_n^E - \theta_g^E + \theta_{cm}^E$$

$$\psi_i^E = \pi - \theta_{cm}^E$$

$$\cos\psi_n^E = -\gamma \sin^2\theta_{cm}^E - \cos\theta_{cm}^E \left(1 - \gamma^2 \sin^2\theta_{cm}^E\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\chi^E = \left(1 + \rho^2 + 2\rho\cos\theta_d^E\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta_d^E\right)^{-\frac{1}{2}} \left[\cos\psi_n^E\left(1 - \rho^2\right) + 2\rho \sin\theta_d^E \sin\psi_n^E\right]$$

III. CONSTRUCTION D'UN SPECTRE ISOTROPE.

On peut remarquer que si on fait $E_\pi = 0$, on obtient pour

$$f^1 = a_{0,j} E_d^{\frac{j}{2}}$$

$$S_{f^1}(0, E, 0) = S_{f^1}(0, E, \pi)$$

car, dans ce cas, on a successivement,

$$\cos\theta_d^E = \frac{E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}} \qquad \theta_n = 0, \pi$$

$$\psi_\ell^E = \theta_d^E \qquad \theta_n = 0$$

$$\cos\psi_n^E = -\gamma \sin^2\theta_d^E + \cos\theta_d^E \left(1 - \gamma^2 \sin^2\theta_d^E\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\chi^E = \psi_n^E \qquad \theta_n = 0$$

$$\psi_\ell^E = \pi - \theta_d^E \qquad \theta_n = \pi$$

$$\cos\psi_n^E = -\gamma \sin^2\theta_d^E - \cos\theta_d^E \left(1 - \gamma^2 \sin^2\theta_d^E\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\chi^E = \psi_n^E \qquad \theta_n = \pi$$

$$T_0 = T_\pi = \sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\left(6Q + 3E_d\right)^{\frac{1}{2}}$$

En définitive : les spectres à 0 et à π sont bien égaux pour $E_\pi = 0$ et f^1 isotrope et on peut écrire d'après la formule (D6) de l'annexe D :

$$S_{f^1}\left(0, E, \theta_n = 0, \pi\right) = \frac{A_{n_d n_\pi}}{(m_d)^2} \int_{E_d^2}^{E_d^1} f^1(E_d, \theta_d)\, \delta_\pi \, \frac{1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{E_d^{\frac{1}{2}}}{(6Q + 3E_d)^{\frac{1}{2}}}\, dE_d$$

où

$$f^1 = a_{0,j} E_d^{\frac{j}{2}}$$

Dans ce cas également, on montrera dans l'annexe D que l'égalité peut s'étendre à $\mathcal{O}_n$ quelconque (relation (D9))

Si par ailleurs, on considère la fonction f^1 telle que

$$f^1(E_d, \theta_d) = 1$$

on est ramené à l'étude de la fonction

$$\frac{1}{n_d n_r} S_1(0, E, 0) = \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{2\epsilon_d}{(m_d)^2} \cdot \frac{\sigma_T}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{8\pi}{\sqrt{E_d(6Q + 3E_d)}}$$

$$\frac{(m_d)^2}{4 n_d n_r} S_1(0, E, 0) = \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} dE_d \frac{\sigma_T}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \sqrt{\frac{E_d}{6Q + 3E_d}} \left(1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E\right)$$

$$E_d^{min} = Inf\left(E_d^2, E_d^E\right)$$

$$\cos\psi_n^E = \frac{8E - (6Q + 4E_d)}{2\sqrt{E_d(6Q + 3E_d)}}$$

Si on pose $\frac{(m_d)^2}{4 n_d n_r} S_1(0, E, 0) = \Sigma(E)$, on veut étudier $\frac{d\Sigma}{dE}$

On pose de même

$$h(E_d) = \frac{\sigma_T}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \sqrt{\frac{E_d}{6Q + 3E_d}}$$

On a donc à étudier

$$\sum(E) = \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} h(E_d)\left(1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E\right) dE_d$$

en fonction de E .

Nous avons deux cas à étudier, suivant la valeur de E_d^{min} . Nous savons que pour E donné, E_d^E est la solution, inférieure à E_d^1, de

$$D(E_d, 0, E, 0) = 0$$

équation qui se réduit ici à une forme valable quel que soit ϑ_n . Quand E varie, cette équation est l'équation d'une courbe comprenant deux branches qu'on écrit :

$$\sqrt{8E} = \sqrt{E_d} + \sqrt{6Q + 3E_d}$$

$$\sqrt{8E} = -\sqrt{E_d} + \sqrt{6Q + 3E_d}$$

Ces deux branches, se rejoignent sur l'axe $E_d = 0$, où la tangente est verticale et où

$$E = \frac{3}{4}Q$$

En fait l'étude se ramène à celle de E_d^{min} dépendant ou non de E

$$\sum(E) = \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} h(E_d)\left(1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E\right) dE_d$$

$$\frac{d\sum}{dE} = -\frac{dE_d^{min}}{dE}\left[h(E_d)\left(1 + A + B\right)\right]_{E_d = E_d^{min}} + \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} 8h(E_d)\frac{4E - (3Q + 2E_d)}{E_d(6Q + 3E_d)}\left\{A + 2B\frac{\left[4E - (3Q + 2E_d)\right]^2}{E_d(6Q + 3E_d)}\right\} dE_d$$

La quantité sous l'intégrale provient de la dérivation de $h(E_d)\left(A\cos^3\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E\right)$ obtenue en remplaçant $\cos\psi_n^E$ par sa valeur en fonction de E et en dérivant par rapport à E . On peut alors dresser le tableau de variation de $\Sigma(E)$ en faisant les remarques suivantes. Etant donné la forme de la courbe représentative des variations de la fonction $\mathcal{D}(E_d, 0, E, 0) = 0$, on peut en déduire que

$$E_d^{min} = E_d^E$$

pour

$$E \in \left[{}^0E^1 , E^1\right]$$

de même

$$E_d^{min} = E_d^E$$

pour

$$E \in \left[E^2 , {}^0E^2\right]$$

où E^1 et E^2 sont les racines de

$$\mathcal{D}\left(E_d^1, 0, E, 0\right) = 0$$

et ${}^0E^1$ et ${}^0E^2$ sont les racines de

$$\mathcal{D}\left(E_d^2, 0, E, 0\right) = 0$$ (conf. fig. B4)

enfin, pour

$$E \in \left[{}^0E^2 , {}^0E^1\right]$$

on a

$$E_d^{min} = E_d^2$$

Lorsque $E \in \left[{}^{\circ}E^2, {}^{\circ}E^1\right]$, on peut remarquer que la dérivée se réduit à

$$\frac{d\Sigma}{dE} = \int_{E_d^2}^{E_d^1} 8\pi(E_d)\left\{A + 2B\,\frac{\left[4E-(3Q+2E_d)\right]^2}{E_d(6Q+3E_d)}\right\}\frac{4E-(3Q+2E_d)}{E_d(6Q+3E_d)}\,dE_d .$$

Or dans ce cas précisément le signe de $\frac{d\Sigma}{dE}$ dépend de celui de

$$E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{2}$$

cette quantité étant négative, $\forall E_d \in \left[E_d^2, E_d^1\right]$ pour

$$E < \frac{3}{4}Q + E_d^2 \times \frac{1}{2}$$

Par ailleurs la courbe $\mathcal{D}(E_d, o, E, o) = o$, nous donne les sens de variation de $\frac{dE_d}{dE}$, sur les 2 portions de courbe qui la composent :

$$E \in \left[\frac{3}{4}Q, E^1\right] \qquad \frac{dE_d}{dE} > o$$

$$E \in \left[E^2, \frac{3}{4}Q\right] \qquad \frac{dE_d}{dE} < o$$

donc, lorsque $E \notin \left[{}^{\circ}E^2, {}^{\circ}E^1\right]$ et en particulier au voisinage de E^2 et de E^1 on peut en déduire le signe de $\frac{d\Sigma}{dE}$ (cf. figure B4).

On peut, par exemple, aboutir à la configuration suivante :

E	E^2		$^0E^2$		$\frac{3}{4}Q$		$^0E^1$		E^1
E_d^{min}	$E_d^E = E_d^1$	E_d^E	$E_d^E = E_d^2$	E_d^2		$E_d^E = E_d^1$		E_d^E	
$\frac{d\Sigma}{dE}$	+	0 −	−		−	0 +	+	0	−
Σ	↗	↘	↘		↘	↗		↘	

Notons que la dérivée possède 2 points de discontinuité, si $E_d^2 \neq 0$

$$E = {}^0E^2 \ , \ {}^0E^1$$

Ce sont les points où l'on quitte la courbe $\mathcal{D} = 0$, pour passer sur la verticale d'abscisse E_d^2 dans le plan des (E_d, E) .

ANNEXE D

ETUDE DES FONCTIONS DE BASE

Pour pouvoir réaliser la résolution du système (54) de III.B.4.c., il faut construire les fonctions de base $U_{i,j}$. Nous rappelons qu'elles sont données par les 3 formules, suivant les valeurs de θ_n (formule (55)) :

$$\theta_n \neq 0 , \pi$$

$$U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n) = \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} E_d^{\frac{j}{2}} \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d \cos^i\theta_d \, \Delta(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$$

$$\Delta(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) = g(E_d, \theta_d, E_\pi) \Delta^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$$

$$U^*_{i,j}(E_d, E_\pi, E, \theta_n) = E_d^{\frac{j}{2}} \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d \, \Delta(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) \cos^i\theta_d .$$

$$\theta_n = 0$$

$$U^*(E_d, E_\pi, E, 0) = E_d^{\frac{j}{2}} \cos^i\theta_d^E \, g(E_d, \theta_d^E, E_\pi) \frac{\delta_\pi}{2} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{2\sqrt{2}\sqrt{E}}{\Gamma_0}$$

$$\Gamma_0 = \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \left[-2\rho E_d E + \sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\left\{2Q + E_d(1+3\rho^2)\right\} - \rho E_d\left\{\frac{Q}{2} + \frac{E_d}{2}(1+\rho^2)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta_d^E = \frac{E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}(1+\rho^2) - \rho\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}}{\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho}$$

$$\theta_\pi = \pi$$

$$U^*_{i,j}(E_d, E_\pi, E, \pi) = E_d^{\frac{j}{2}} \cos^i\theta_d^E\, g(E_d, \theta_d^E, E)\, \frac{\sigma_\pi}{2} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{2\sqrt{2E}}{\Gamma_\pi}$$

$$\Gamma_\pi = \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} + E_d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \left[2\rho E_d E + \sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\left\{2Q + E_d(1+\rho^2)\right\} + \rho E_d\left\{\frac{Q}{2} + \frac{E_d}{2}(1+\rho^2)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta_d^E = \frac{E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}(1+\rho^2) + \rho\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}}{-\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho}$$

I. ETUDE $\theta_n \neq 0, \pi$ DANS LE CAS $E_\pi = 0$

I.a. Relations de récurrence.

Nous rappelons que $\delta(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$ possède en ${}^1\theta_d^E$ et ${}^2\theta_d^E$ 2 branches infinies ($\theta_d^E \neq 0, \pi$) et que l'intégrale $U^*_{i,j}$ y converge.

Les cas $\theta_d^E = 0$ ou $\theta_d^E = \pi$ sont justiciables d'un passage à la limite que nous n'explicitons pas.

Nous continuons l'étude de $U^*_{i,j}$ en travaillant à j constant. Nous pouvons en déduire un certain nombre de propriétés, de ces quantités, tant en fonction des valeurs de i, que des valeurs de θ_n.

Nous examinerons le cas isotrope ($\lambda = 0$, $\xi_T = 0$)

Nous rappelons l'écriture développée de $U^*_{i,j}(E_d, 0, E, \theta_n)$ (Annexe B, paragraphe II.a.)

$$U^*_{i,j}(E_d,0,E,\theta_n) = E_d^{\frac{i}{2}} \int_{\theta_d^E}^{2\theta_d^E} \cos^i\theta_d \, g(E_d) \frac{\sigma_T}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{2E^{\frac{1}{2}}}{W_n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sin\theta_d \, d\theta_d}{\left[(\sqrt{E_1} - \sqrt{E})(\sqrt{E'_1} + \sqrt{E})(\sqrt{E} - \sqrt{E_2})(\sqrt{E} + \sqrt{E'_2})\right]^{\frac{1}{2}}}$$

qu'on peut encore écrire :

$$U^*_{i,j}(E_d,0,E,\theta_n) = E_d^{\frac{i}{2}} g \frac{\sigma_T}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{16E^{\frac{1}{2}}}{W_n^{\frac{1}{2}}} \int_{\theta_d^E}^{2\theta_d^E} \frac{\cos^i\theta_d \sin\theta_d \, d\theta_d}{\left[(\sqrt{8E_1} - \sqrt{8E})(\sqrt{8E'_1} + \sqrt{8E})(\sqrt{8E} - \sqrt{8E_2})(\sqrt{8E} + \sqrt{8E'_2})\right]^{\frac{1}{2}}}$$

On étudiera J_i tel que :

$$J_i = \int_{\theta_d^E}^{2\theta_d^E} \frac{\cos^i\theta_d \sin\theta_d \, d\theta_d}{\left[(\sqrt{8E_1} - \sqrt{8E})(\sqrt{8E'_1} + \sqrt{8E})(\sqrt{8E} - \sqrt{8E_2})(\sqrt{8E} + \sqrt{8E'_2})\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (D1)$$

On peut calculer les valeurs de θ_d^E en fonction de l'angle $\alpha(E_d, 0, E, \theta_n)$ d'origine θ_n , indiqué sur la figure B 2-a :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

il y a suivant les cas de figure, 2 relations de récurrence.

$$\left.\begin{aligned} (i+1) J_{i+1} &= (2i+1)\cos\theta_n \cos\alpha^E J_i + i(\sin^2\theta_n - \cos^2\alpha^E) J_{i-1} \\ (i+1) J_{i+1} &= (2i+1)\cos\theta_n \cos(\alpha^E + 2\theta_n) J_i + i\left[\sin^2\theta_n - \cos^2(\alpha^E + 2\theta_n)\right] J_{i-1} \end{aligned}\right\} \qquad (D2)$$

Les deux premiers termes J_0 et J_1 sont tels que

$$J_0 = \frac{\pi}{\sqrt{32 E_d E}} \qquad \text{(D3)}$$

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \cos\theta_n \cos\alpha^E J_0 \\ J_1 &= \cos\theta_n \cos(\alpha^E + 2\theta_n) J_0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(D4)}$$

De la relation

$$U^*_{i,j}(E_d, 0, E, \theta_n) = E_d^{\frac{j}{2}} g \frac{G\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{16 E^{\frac{1}{2}}}{W_n^{\frac{1}{2}}} \cdot J_i$$

on déduit immédiatement l'image des relations de récurrence entre les J_i

$$\left.\begin{aligned} (i+1)\, U^*_{i+1,j} &= (2i+1)\cos\theta_n \cos\alpha^E U^*_{i,j} + i(\sin^2\theta_n - \cos^2\alpha^E) U^*_{i-1,j} \quad \forall j \\ (i+1)\, U^*_{i+1,j} &= (2i+1)\cos\theta_n \cos(\alpha + 2\theta_n) U^*_{i,j} + i\left[\sin^2\theta_n - \cos^2(\alpha + 2\theta_n)\right] U^*_{i-1,j} \quad \forall j \end{aligned}\right\} \qquad \text{(D5)}$$

I.b. Propriétés des courbes.

Les différents cas très intéressants sont : $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ et θ_n quelconque.

1er cas :

$$\theta_n = \frac{\pi}{2}$$

Les 2 relations se réduisent à :

$$(i+1)\, U^*_{i+1,j}\left(E_d, 0, E, \frac{\pi}{2}\right) = i \sin^2\alpha^E\, U^*_{i-1,j}\left(E_d, 0, E, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ce premier terme est donné, pour les pairs, par :

$$U^{*}_{0,j}\left(E_d, 0, E, \frac{\pi}{2}\right) = E_d^{\frac{j}{2}} g \frac{\sigma_T}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos\psi_n^E + B\cos^2\psi_n^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{8\pi}{\sqrt{E_d(6Q + 3E_d)}} \qquad (D6)$$

pour les impairs, par :

$$U^{*}_{1,j}\left(E_d, 0, E, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (D7)$$

On en déduit pour les U , pour $i = 2p$

$$U_{2p+1,j}\left(0, E, \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

pour $\qquad i = 2p + 1$

$$0 \leqslant \cdots \leqslant U_{2p+2,j} \leqslant \cdots \leqslant U_{2,j} \leqslant U_{0,j}$$

2eme cas : $\qquad \theta_n \neq \frac{\pi}{2}$

On montre facilement que l'on a l'égalité :

$$U_{0,j}\left(0, E, \theta_n\right) = U_{0,j}\left(0, E, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (D8)$$

I.c. Construction des courbes correspondantes.

Ces différentes propriétés nous permettent de tracer le réseau des courbes particulièrement quand on connaît la courbe isotrope, c'est-à-dire $U_{0,j} \cdot A\frac{\pi}{2}$ on pourra tracer le réseau complet des courbes paires qui s'emboîtent les unes dans les autres (voir fig. 10 à 17).

II. ETUDE DU CAS $\theta_n = 0, \pi$

II.a. Etude de la relation de récurrence dans le cas $E_\pi = 0$

$$U^*_{i,j}(E_d, 0, E, 0) = E_d^{\frac{j}{2}} \cos^i\theta_d^E \, g \frac{\sigma_T}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{8\pi}{E_d^{\frac{1}{2}}(6Q + 3E_d)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\theta_d^E = \frac{8E - 6Q - 2E_d}{\sqrt{32E_dE}}$$

$$U^*_{i,j}(E_d, 0, E, \pi) = E_d^{\frac{j}{2}} \cos^i\theta_d^E \, g \frac{\sigma_T}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\psi_n^E + B\cos^4\psi_n^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{8\pi}{E_d^{\frac{1}{2}}(6Q + 3E_d)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\theta_d^E = -\frac{8E - 6Q - 2E_d}{\sqrt{32E_dE}}$$

De ces différentes relations on déduit tout d'abord

$$U_{0,j}(0, E, 0) = U_{0,j}(0, E, \theta_n) = U_{0,j}(0, E, \tfrac{\pi}{2}) = U_{0,j}(0, E, \pi) \qquad (D9)$$

La relation de récurrence se réduit à :

$$U^*_{i,j}(E_d, 0, E, 0) = \cos\theta_d^E \, U^*_{i-1,j}(E_d, 0, E, 0)$$

$$U^*_{i,j}(E_d, 0, E, \pi) = \cos\theta_d^E \, U^*_{i-1,j}(E_d, 0, E, \pi)$$

les 2 valeurs de $\cos\theta_d^E$ sont 2 valeurs opposées pour une même valeur de E. On en déduit :

$$\left.\begin{aligned} U_{2p,j}(0, E, 0) &= U_{2p,j}(0, E, \pi) \\ U_{2p+1,j}(0, E, 0) &= -U_{2p+1,j}(0, E, \pi) \end{aligned}\right\} \qquad (D10)$$

De même on peut établir l'inégalité :

$$0 \leqslant \ldots \leqslant U_{4,j} \leqslant \ldots \leqslant U_{2,j} \leqslant U_{0,j}$$

II.b. Construction de courbes.

Connaissant ces diverses propriétés, nous en déduisons pour $E_r = 0$, les courbes isotropes, pour tous les angles. Ceci nous permet de tracer cette courbe pour $\theta_n \neq 0$ puisqu'on la connaît pour $\theta_n = 0, \pi$.

Ensuite pour $\theta_n = 0$, on déduit le réseau des courbes, courbes impaires, courbes paires, le réseau de $\theta_n = \pi$ se déduit du précédent grâce aux propriétés démontrées.

Pour $\theta_n = \frac{\pi}{2}$, on peut maintenant tracer le réseau complet des courbes, connaissant la courbe isotrope (cf. fig. 10 à 17).

ANNEXE E

PREPARATION DES CALCULS POUR LE PASSAGE SUR ORDINATEUR
CALCUL PRATIQUE DE δ^*, δ, U_{ij}^*, $U_{i,j}$

I. Choix du système d'unités

- les énergies (E_d , E_n , E) sont exprimées en keV ;
- les longueurs en mètres ;
- les temps en microsecondes.

En choisissant le keV comme unité d'énergie, on tient compte de la plage balayée qui va de la dizaine de keV pour les deutérons à plusieurs MeV pour les neutrons.

La deuxième quantité couramment utilisée dans les calculs est la vitesse : nous l'avons exprimée en 10^8 cm/s, non seulement parce que c'est l'unité utilisée pour les réactions D.D.n (formules de σ_n, A, B) mais aussi parce que c'est l'ordre de grandeur des vitesses des fluides (v_n).

Dans la suite de cet exposé, les énergies étant mesurées par temps de vol, sur une base dont la longueur est donnée en mètres, le temps qui correspond à 10^8 cm/s est la microseconde. C'est l'unité de temps que les expérimentateurs utilisent.

L'ensemble de ces conditions justifie notre choix d'unités.

Il nous faut maintenant calculer la masse du deutéron dans ce système d'unité :

$$m_d = 3,343 \times 10^{-24} g \text{ (en cgs)}$$

$$E_d(erg) = \frac{1}{2}(3,343 \times 10^{-24})(g)\, g^2 (cm/s)$$

$$E_d(keV) = \frac{1}{2}\frac{3,343 \times 10^{-15}}{1,602}\, g^2 (cm/s)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{33,43}{1,502}\left(10^{-8} g\right)^2 \left(10^8 cm/s\right)$$

$$\left.\begin{aligned} m_d &= 20,867 \\ m_n &= 10,434 \end{aligned}\right\} \quad (E1)$$

A partir de ce résultat, on peut en déduire les valeurs de E_π associées à certaines valeurs de v_π .

$$v_\pi = 10^8 \text{ cm/s}$$

$$E_\pi = 10,44 \text{ keV}$$

$$v_\pi = 0,4 \times 10^8 \text{ cm/s}$$

$$E_\pi = 1,6704 \text{ keV}$$

II. Données.

Les données sont $\tilde{\sigma}_T(g)$, $A(E_B)$, $B(E_B)$

Nous tirons $\tilde{\sigma}_T$ de l'article de BERNSTEIN et COMISAR [4], A et B de THEUS, Mc GARRY et BEACH [13].

Nous rappelons les expressions

$$\left.\begin{array}{l} E_B < 80\ keV \\ \sigma_T = 1{,}79 \times 10^{-23}\, e^{-\frac{14{,}578}{g}} \times g^2 \ (cm^2) \end{array}\right\} \quad (E2)$$

$$E_B > 80\ keV$$

$$\sigma_T = 10^{-27} \times e^{-9{,}082 + 8{,}9606 g - 2{,}5954 g^2 + 0{,}386918 g^3 - 0{,}00287342 g^4 + 0{,}00084047 g^5}$$

Nous rappelons les définitions :

$$E_B = E_d (1 + \rho^2 - 2\rho \cos\theta_d)$$

$$E_B = \frac{1}{2} m_d g^2$$

$$g = \left(\frac{2E_d}{m_d}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta_d)^{\frac{1}{2}}$$

g en 10^8 cm/s

La quantité B sera donnée par une droite en fonction de E_B , pour $E_B \geqslant$ 50,8 keV.

$$E_B < 50,8$$

$$B = 0$$

$$E_B \geqslant 50,8$$

$$B = aE_B + b$$

$$a = \frac{0,66}{252,1} = 0,002618$$

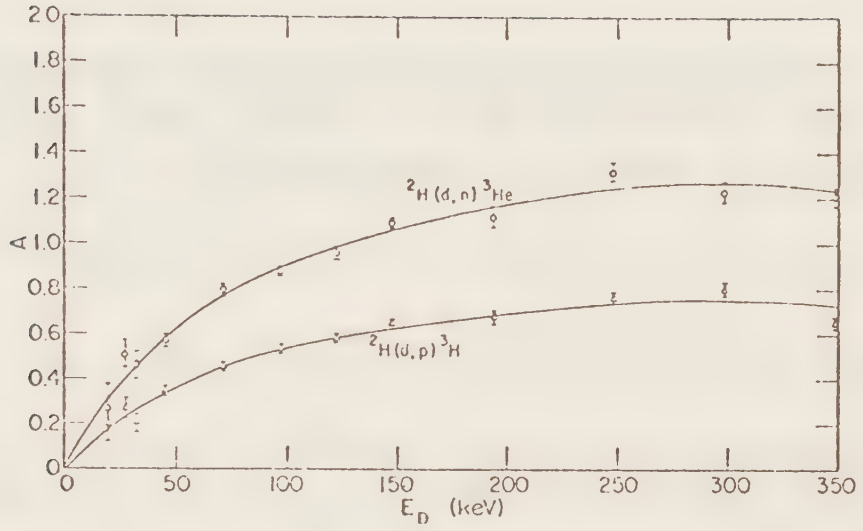
$$b = 0,12 - 96,6\,\frac{0,66}{252,1} = 0,1329$$

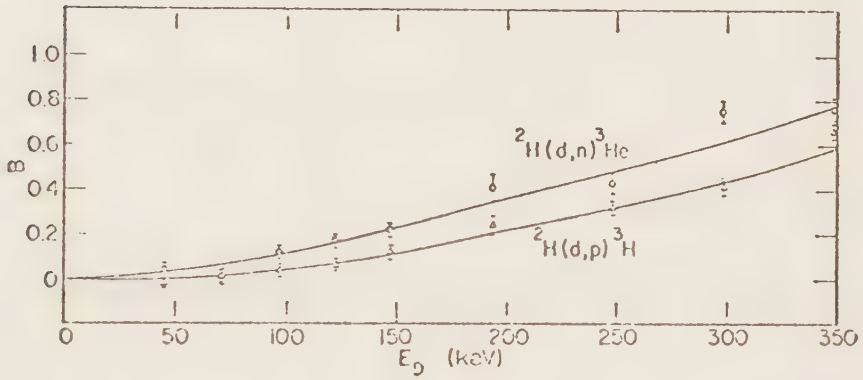
(E3)

Cette droite est une approximation due à BERNSTEIN.

Les valeurs de A sont données par le tableau suivant :

E_B (keV)	A
0	0
19,5	0,32
32,0	0,46
45,1	0,58
71,0	0,76
96,6	0,89
122,0	0,99
147,5	1,07
194,0	1,16
298,5	1,26
348,7	1,25
400,0	1,21
700,0	0,85





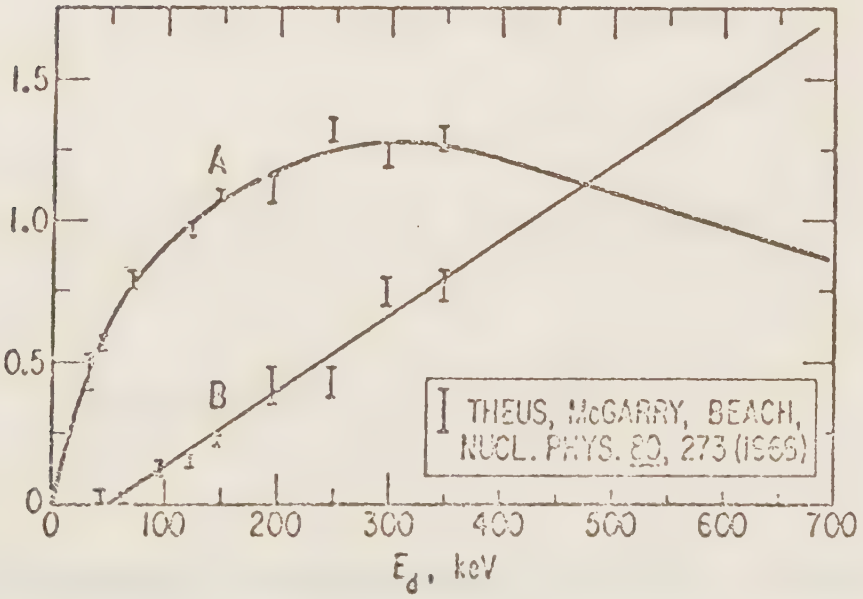


Fig. E 1 : $A(E_B)$ et $B(E_B)$

Ces valeurs sont tirées de l'article de THEUS, pour celles inférieures à 348,7 keV. L'extrapolation de 400 à 700 keV est due à BERNSTEIN. La courbe définitive est obtenue par lissage polynômial.

Les graphiques de la figure E1 résument ces données.

III. Calcul de $S^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$ et $S(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$

Nous rappelons les formules permettant le calcul du spectre S_{f1} pour $\theta_n \neq 0, \pi$ (formules (27), (28), (29), (A1), (A2), (A3), (A4), (A8), (A12), (B5), (B8)).

$$S_{f1} = n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$$

$$S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n) = \int_{\theta_d^E}^{\pi} d\theta_d \sin\theta_d f^{\gamma}(E_d, \theta_d) S(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$$

$$S(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) = g(E_d, \theta_d, E_\pi) S^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$$

$$S^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n) = \frac{\sigma_\pi}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{1}{\gamma W_n \sin\theta_{cm} \sin\theta_n \sin\varphi_d^E}$$

$$g(E_d, \theta_d, E_\pi) = \left(\frac{2E_d}{m_d}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta_d\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans ces calculs, E_π est un paramètre à déterminer, θ_n est une donnée imposée par l'expérience (direction d'observation) et E est la variable courante.

E_d et θ_d sont les deux variables d'intégration.

La chaîne de calcul permettant d'obtenir $\mathcal{S}^*$ comporte essentiellement les quantités suivantes :

$$E_B = E_d\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)$$

$A(E_B)$, $B(E_B)$ } voir le § précédent (formule E 3)

$$g = \left(\frac{2E_d}{m_d}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\sigma_\pi(g)$ voir le § précédent (formule E 2)

$$\operatorname{tg}\theta_{cm} = \frac{\sin\theta_d}{\cos\theta_d+\rho} \qquad 0 \leqslant \theta_{cm} \leqslant \pi$$

$$\operatorname{tg}\theta_g = \frac{\sin\theta_d}{\cos\theta_d-\rho} \qquad 0 \leqslant \theta_g \leqslant \pi$$

$$W_n = \frac{3}{4}\left[Q+\frac{E_d}{2}\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)\right]$$

$$\gamma = \frac{E_d^{\frac{1}{2}}\left(1+\rho^2+2\rho\cos\theta_d\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[6Q+3E_d\left(1+\rho^2-2\rho\cos\theta_d\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\psi_n^E = \frac{E-W_n\left(1+\gamma^2\right)}{2\gamma W_n} \qquad 0 \leqslant \psi_n^E \leqslant \pi$$

$$\cos\chi^E = \frac{1}{\sin\theta_{cm}}\left[\gamma\cos\theta_{cm}\sin\left(\theta_g-\theta_{cm}\right)+\sin\theta_g\cos\psi_n^E-\cos\theta_n\sin\left(\theta_g-\theta_{cm}\right)\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\psi_n^E\right)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad 0 \leqslant \chi^E \leqslant \pi$$

$$\cos\varphi_d^E = \frac{\frac{E - W_n(1-\gamma^2)}{2\gamma\sqrt{EW_n}} - \cos\theta_{cm}\cos\theta_n}{\sin\theta_{cm}\sin\theta_n} \qquad 0 \leqslant \varphi_d^E \leqslant \pi$$

$$\sin\varphi_d^E = \sqrt{1 - \cos^2\varphi_d^E}$$

On calcule également E_2 et E_1 à l'aide des formules (A 12) :

$$\sqrt{E_2} = \sqrt{W_n}\left[\gamma\cos(\theta_n + \theta_{cm}) + \sqrt{1 - \gamma^2\sin^2(\theta_n + \theta_{cm})}\right]$$

$$\sqrt{E_1} = \sqrt{W_n}\left[\gamma\cos(\theta_n - \theta_{cm}) + \sqrt{1 - \gamma^2\sin^2(\theta_n - \theta_{cm})}\right]$$

On place ensuite E par rapport à E_1 et E_2 :

$E \in]E_2, E_1[$ entraîne

$$\sigma^*(E_d, \theta_d, E_r, E, \theta_n) = \frac{\sigma_T}{4\pi} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{1}{\gamma W_n \sin\theta_{cm}\sin\theta_n\sin\varphi_d^E}$$

$E \notin]E_2, E_1[$ entraîne

$$\sigma^*(E_d, \theta_d, E_r, E, \theta_n) = 0$$

Le calcul-machine se déduit de la suite de ces opérations :

$$\rho\ ,\ \sin\theta_d\ ,\ \cos\theta_d \longrightarrow tg\,\theta_{cm}$$

$$tg\,\theta_{cm} \longrightarrow \theta_{cm}\ ,\ \theta_{cm}+\theta_n\ ,\ \theta_{cm}-\theta_n$$

$$\gamma\ ,\ W_n\ ,\ \theta_{cm}+\theta_n\ ,\ \theta_{cm}-\theta_n \longrightarrow E_2\ ,\ E_1$$

On compare E à E_2 et E_1

Si E est extérieur à $]E_2, E_1[$ on écrira

$$\not{\sigma}^* = 0$$

Si $E \in]E_2, E_1[$ on continue le calcul :

$$E\ ,\ W_n\ ;\ \gamma \longrightarrow \cos\overset{E}{\underset{1n}{\psi}}$$

$$\sin\theta_{cm}, \cos\theta_{cm}, \sin\theta_n, \cos\theta_n \longrightarrow \cos\varphi_d^E$$

$$tg\,\theta_g \longrightarrow \cos\chi^E$$

E_B ; g

A
B
} obtenues par lissage 2 250

σ_T

$\not{\sigma}^*(E_i, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$

Le programme 1 réalise une tabulation de σ^* en fonction de E et de E_d, (E, ED en machine).

On obtient également un STROMBERG-CARLSON donnant σ^* en fonction de E.

Remarque sur la forme analytique de σ^* : on peut expliciter en fonction de E_d, θ_d et E_π, de la manière suivante :

$$\sin\varphi_d^* = \frac{\left[-E+2\gamma\sqrt{EW_n}\cos(\theta_n-\theta_{cm})+W_n(1-\gamma^2)\right]^{\frac{1}{2}}\left[E-2\gamma\sqrt{EW_n}\cos(\theta_n+\theta_{cm})-W_n(1-\gamma^2)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\gamma\sqrt{EW_n}\sin\theta_{cm}\sin\theta_n}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{E_1}-\sqrt{E}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{E_1'}+\sqrt{E}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{E}-\sqrt{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{E}+\sqrt{E_2'}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\gamma\sqrt{EW_n}\sin\theta_{cm}\sin\theta_n}$$

formule où E_1, E_1', E_2, E_2' sont exprimés explicitement en fonction de E_d, θ_d, E_π, (formule A 13).

IV. Branches asymptotiques de $\sigma^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$

Pour $\theta_n \neq 0, \pi$ et $\theta_d \neq 0, \pi$ l'expression de σ^* fait apparaître deux asymptotes pour :

$$E = E_1(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$$

et

$$E = E_2(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$$

où E_π et θ_n sont fixés.

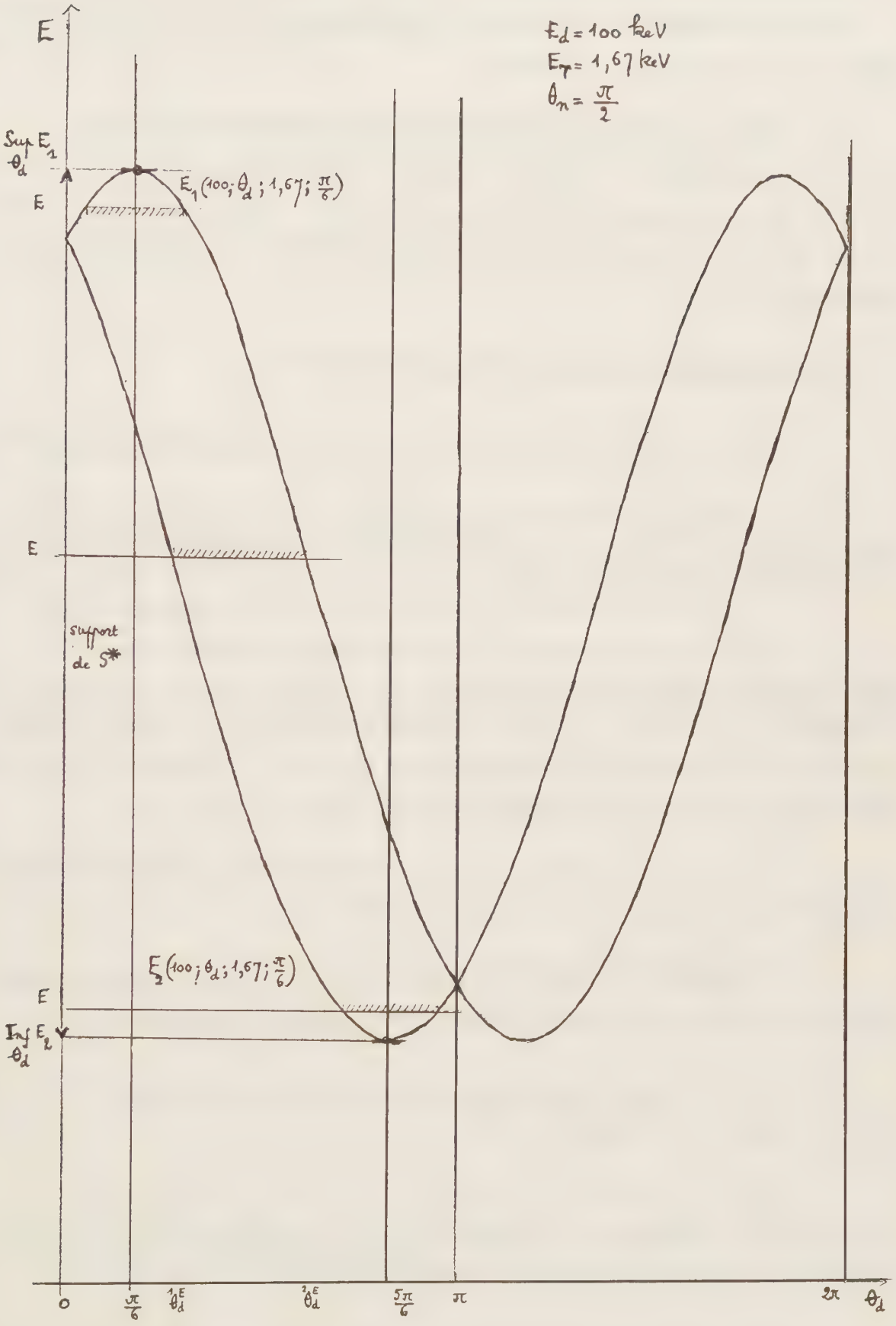


Fig. E2 : $E_1\left(100;\theta_d;1{,}67;\frac{\pi}{6}\right)$ et $E_2\left(100;\theta_d;1{,}67;\frac{\pi}{6}\right)$

Si l'on construit la courbe $\mathcal{S}^*$ en fonction de E , E_d et θ_d étant fixés, les asymptotes sont évidentes.

$\mathcal{S}^*(E)$ a le sens d'un spectre dû à une injection conique.

Si l'on construit $\mathcal{S}^*$ en fonction de θ_d (calcul de $\mathcal{S}^*$ par intégration en θ_d) on a montré que les branches infinies étaient obtenues pour deux valeurs de θ_d : ${}^1\theta_d^E$, ${}^2\theta_d^E$ (conf. annexe B § 1).

V. Calcul de $\bar{U}_{ij}^*(E_d, E_T, E, \theta_n)$, $S^*(E_d, E_T, E, \theta_n)$ pour $\theta_n \neq 0, \pi$

$$\mathcal{S}^*(E_d, E_m, E, \theta_n) = \int_{{}^1\theta_d^E}^{{}^2\theta_d^E} d\theta_d \sin\theta_d \, f'(E_d, \theta_d) \, \mathcal{S}(E_d, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$$

L'existence de branches infinies de $\mathcal{S}$ a amené, dans un premier temps, à calculer S^* par la méthode de SIMPSON, en utilisant un majorant en bout d'intervalle (Annexe 3, voir λ , μ, ν).

Dans un deuxième temps, la méthode numérique INPAR, basée sur GAUSS-LEGENDRE, déterminant les abscisses x_i et les poids ω_i tels que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ soit approchée au mieux par la somme $\sum_i \omega_i f(x_i)$ a conduit à de bien meilleurs résultats, en divisant l'intervalle total d'intégration en trois, les deux intervalles extrêmes étant petits.

La méthode de SIMPSON utilisant des pas déterminés par la majoration précédente a permis de vérifier ces résultats.

Le programme 2 réalise l'intégration en θ_d par la méthode INPAR. Il utilise tous les calculs de 1, auxquels on adjoint les suivants :

E_1 et E_2 sont représentés par les courbes de la figure E2 en fonction de θ_d pour un E_d donné.

Pour E_d donné, les courbes $E_1(E_d, \theta_d, E_T, \theta_n)$ et $E_2(E_d, \theta_d, E_T, \theta_n)$ en fonction de θ_d délimitent un domaine qui est celui où $\mathcal{S}^*(E_d, \theta_d, E_T, E, \theta_n)$ n'est pas identiquement nul quand on fait varier θ_d .

Si on coupe ce domaine par une droite d'ordonnée E , le segment situé à son intérieur détermine l'intervalle d'intégration en θ_d .

La droite d'ordonnée E coupe E_1 et E_2 en O , quatre points dans l'intervalle $\left[0, 2\pi\right]$, le cas pratique de 2 points correspondant aux deux maximums ou aux deux minimums.

Dans l'intervalle $\left[\ 0\ ,\ \pi\ \right]$, la droite d'ordonnée E coupe E_1 et E_2 en O , 2 points, le cas de 1 point correspondant au maximum ou au minimum.

On obtient les abscisses des points ${}^1\theta_d^E$ et ${}^2\theta_d^E$ en résolvant les équations (B3):

$$\cos\theta_d\left(\cos\theta_n\sqrt{\frac{1}{2}E_d E} - E_d\rho\right) \pm \sqrt{\frac{1}{2}E_d E}\,\sin\theta_n\sin\theta_d = E - \frac{3}{4}Q - \frac{E_d}{4}\left(1+\rho^2\right) - \rho\cos\theta_n\sqrt{\frac{1}{2}E_d E}$$

Dans l'intervalle $\left[0, \pi\right]$ les valeurs en E du maximum de E_1 , $\sup_{\theta_d} E_1$, et du minimum de E_2 : $\inf_{\theta_d} E_2$, sont les deux racines positives de l'équation du quatrième degré en $x = \sqrt{E}$ (équation (B7)).

$$\widetilde{D}\left(E_d, E_n, x, \theta_n\right) = -x^4 + x^3 2\rho\sqrt{\frac{E_d}{2}}\cos\theta_n + x^2\left[\frac{3}{2}Q + \frac{E_d}{2}\left(2+\rho^2\sin^2\theta_n\right)\right] - x\rho\cos\theta_n\sqrt{\frac{E_d}{2}}\left[\frac{3}{2}Q + \frac{E_d}{2}\left(5+\rho^2\right)\right] + \frac{E_d^2}{8}\rho^2 - \left[\frac{3}{4}Q + \frac{E_d}{4}\left(1+\rho^2\right)\right]^2$$
$$= 0$$

Si l'on veut construire la courbe $S^*\left(E_d, E_n, E, \theta_n\right)$ en fonction de E , on aura, pour E_d donné :

$$S^*\left(E_d, E_n, E, \theta_n\right) = \int_{{}^1\theta_d^E}^{{}^2\theta_d^E} d\theta_d \sin\theta_d \int^1\left(E_d, \theta_d\right) \delta\left(E_d, \theta_d, E_n, E, \theta_n\right)$$

Si $\quad E \in \left[\inf_{\theta_d} E_2\ ,\ \sup_{\theta_d} E_1\right]$

$$S^*\left(E_d, E_n, E, \theta_n\right) = 0$$

Si $\quad E \notin \left[\inf_{\theta_d} E_2\ ,\ \sup_{\theta_d} E_1\right]$

Si l'on construit la courbe S^* en fonction de E , à E_π et E_d fixés, S^* à le sens d'un spectre, dû à une injection momoénergétique distribuée en angle.

On rappelle que S^* est une fonction bornée.

VI. Calcul de $U_{ij}(E_T, E, \theta_\pi)$ et $S_{f1}(E_T, E, \theta_\pi)$ $\quad \theta_\pi \neq 0, \pi$

Il reste à calculer

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_\pi) = n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_\pi)$$

On a donc coiffé la somme précédente par une intégration en E_d d'abord par la méthode de SIMPSON, ensuite par une méthode INPAR qui a, cette fois encore, donné de meilleurs résultats.

La recherche des bornes en E_d est faite par la résolution de l'équation bicarrée en $z = \sqrt{\frac{E_d}{2}}$ (équation (B 9)).

$$\tilde{D}(z^2, E_\pi, x, \theta_\pi) = -\frac{z^4}{4} + z^2\left[2x^2 - 5x\sqrt{\frac{E_T}{2}}\cos\theta_\pi - \left(\frac{3}{4}Q - \frac{7E_T}{4}\right)\right] - \left[x^2 - x\sqrt{\frac{E_T}{2}}\cos\theta_\pi - \left(\frac{3}{4}Q + \frac{E_T}{4}\right)\right]^2$$
$$= 0$$

Nous allons expliquer ci-dessous, ce que signifient ces deux bornes en E_d .

Pour ce faire, nous revenons à l'étude de $S^*(E_d, E_T, E, \theta_\pi)$ en fonction de E .

A E_d donné, l'équation définissant l'intervalle de variation de E est :

$$D(E_d, E_\pi, E, \theta_\pi) = -\left(\sqrt{E} - \sqrt{E_1}\right)\left(\sqrt{E} - \sqrt{E_2}\right)\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_3}\right)\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_4}\right) = 0$$

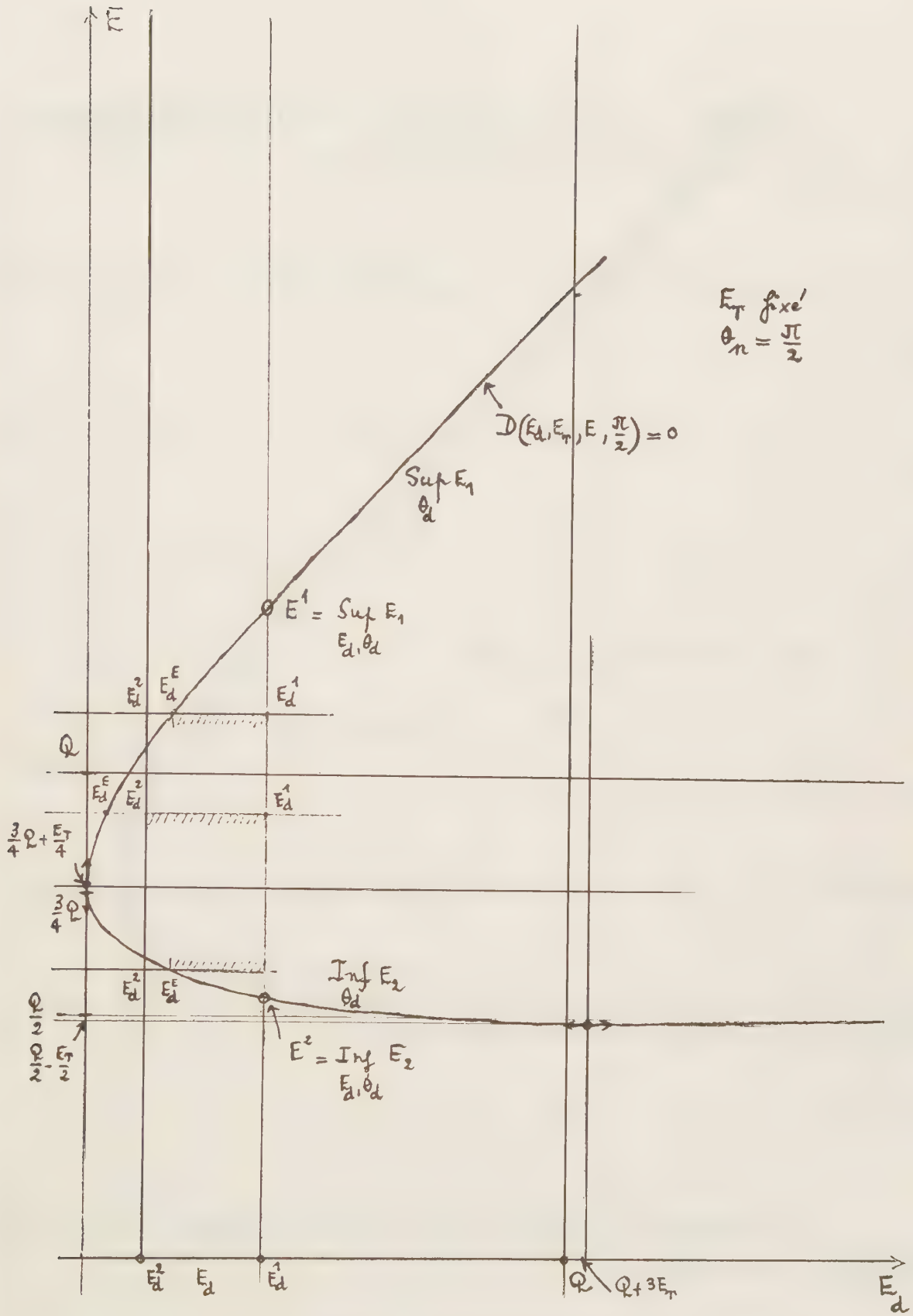


Fig. E 3 : $D(E_d, E_T, E, \frac{\pi}{2}) = 0$, $E_T \neq 0$

Elle définit le domaine dans lequel S^* n'est pas identiquement nulle, par ses bornes, puisqu'elle est équivalente à

$$E = {}^{i}E\left(E_d, E_\pi, \theta_n\right)$$

où

$${}^{1}E = \underset{\theta_d}{Sup}\ E_1$$

$${}^{2}E = \underset{\theta_d}{Inf}\ E_2$$

On en conclut qu'à E_d donné :

$$S^* = \int d\theta_d \sin\theta_d\, f^4 S$$

pour $\mathcal{D}\left(E_d, E_\pi, E, \theta_n\right) \geqslant 0$

ou encore $E \in \left[\underset{\theta_d}{Inf}\, E_2, \underset{\theta_d}{Sup}\, E_1\right]$

$$S^* = 0$$

pour $\mathcal{D}\left(E_d, E_\pi, E, \theta_n\right) < 0$

ou encore $E \notin \left[\underset{\theta_d}{Inf}\, E_2, \underset{\theta_d}{Sup}\, E_1\right]$

La construction du domaine en S^*, donne la figure E3 ci-contre où E_π et θ_n sont fixés.

Dans le domaine choisi pour E_π

$$E_\pi \ll E_d^2 = 50\ keV$$

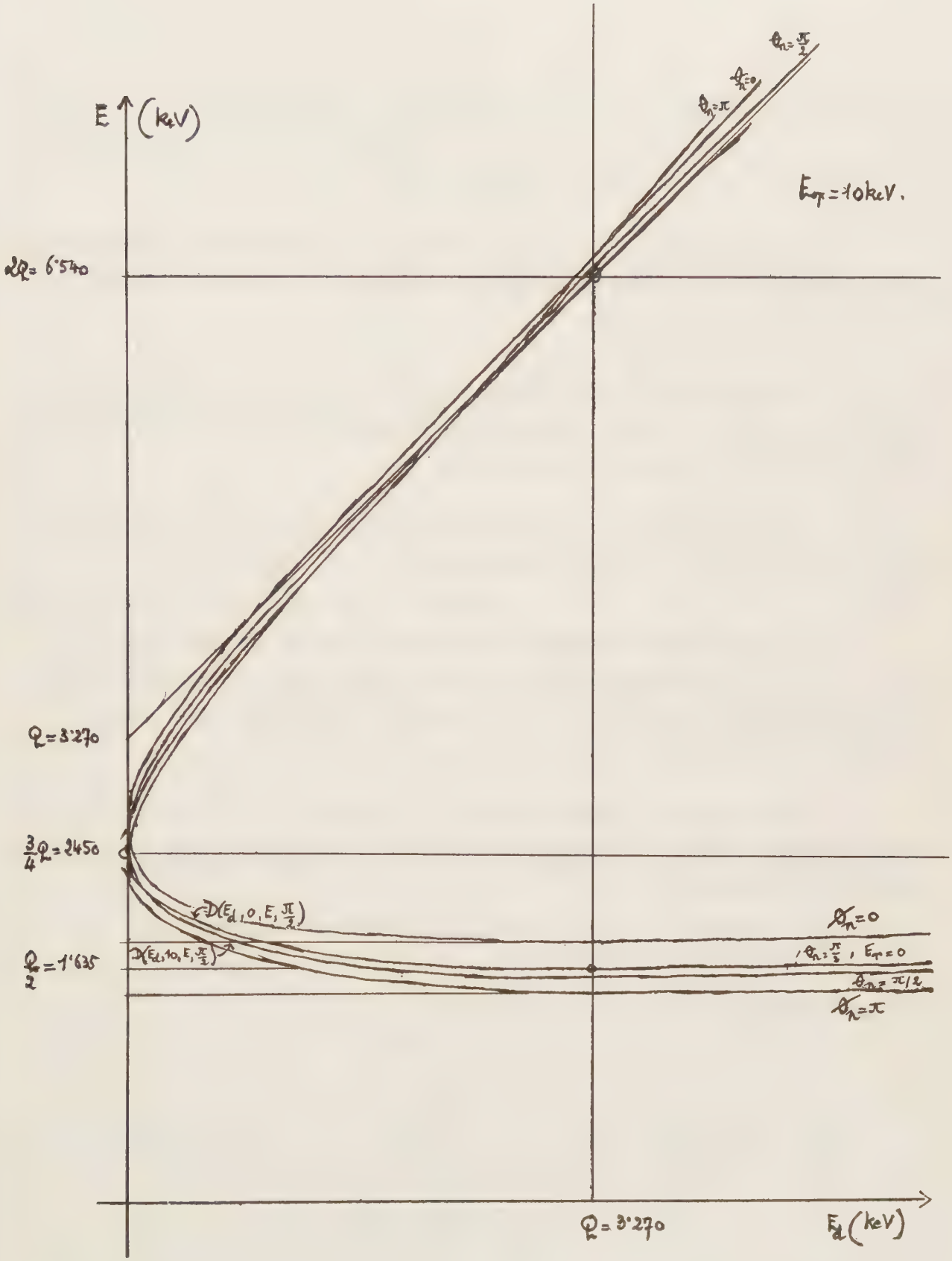


Fig. E 4 : $D(E_d, 10, E, \theta_n) = 0$ pour θ_n variant de 0 à π

et pour θ_n

$$0 < \theta_n < \pi$$

Les différentes courbes paramétrées en θ_n ont toutes la forme indiquée sur la figure E4, comme le montre le réseau de la figure H2 établi pour $E_\pi = 10$ keV et pour $E_d < 2E_\pi$.

La considération de ce domaine en S^*, pour un E_π et un θ_n donnés nous donne la portion du plan (E_d, E) où $S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$ n'est pas identiquement nul et définit l'intégrale S.

Pour calculer S, on se fixe E, c'est-à-dire qu'on coupe le domaine (E_d, E) par une droite d'ordonnée E.

La figure E3 sur laquelle nous avons porté le support de f^1 borné par E_d^2 et E_d^1, nous montre que la droite d'ordonnée E, si elle coupe toujours la droite d'abscisse E_d^1 à l'intérieur du domaine, peut couper E_d^2 à l'extérieur de celui-ci.

Ces différentes considérations nous montrent d'une part que les valeurs extrêmes de E, correspondant à un S non identiquement nul, sont données par l'équation :

$$\mathcal{D}\left(E_d^1 = 600, E_\pi, E, \theta_n\right) = 0$$

dont les solutions sont :

$$E^1 = \sup_{E_d, \theta_d} E_1$$

$$E^2 = \inf_{E_d, \theta_d} E_2$$

pour $E_d \in \left[E_d^2, E_d^1\right]$

d'autre part que le domaine d'intégration en E_d, à E donné, a ses deux extrémités E_d^{min} et E_d^{max} telles que :

$$E_d^{max} = E_d^1 \qquad \forall\ E$$

$$E_d^{min} \begin{cases} = E_d^2 & \text{si } E_d^2 > E_d^E \\ = E_d^E & \text{si } E_d^2 < E_d^E \end{cases}$$

où E_d^E est la plus petite racine de l'équation :

$$\mathcal{D}(E_d, E_\pi, E, \theta_n) = 0 \qquad \text{à } \theta_n \text{ donné}$$

En définitive, l'intégrale S_{f1} s'écrit :

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^{min}}^{E_d^1} \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)\, dE_d$$

VII. Calcul de $U_{ij}(E_\pi, E, \theta_n)$ et de $S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n)$ dans le cas $\theta_n = 0, \pi$

Nous rappelons les deux formules de base (voir formules (31) et (33))

$$\theta_n = 0$$

$$S^*(E_d, E_\pi, E, 0) = f^1(E_d, \theta_d^E)\, g(E_d, \theta_d^E, E_\pi)\, \frac{\sigma_\pi}{2} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_0}$$

$$\theta_n = \pi$$

$$S^*(E_d, E_\pi, E, \pi) = f^1(E_d, \theta_d^E)\, g(E_d, \theta_d^E, E_\pi)\, \frac{\sigma_T}{2} \cdot \frac{1 + A\cos^2\chi^E + B\cos^4\chi^E}{1 + \frac{A}{3} + \frac{B}{5}} \cdot \frac{\sqrt{8E}}{T_\pi}$$

Ces deux cas particuliers se réduisent chacun à une intégrale simple, qui a été calculée au moyen du système INPAR. Les domaines d'intégration respectifs sont ceux qu'on obtient en faisant $\theta_n = 0$ ou π dans le cas général.

Les mêmes remarques s'appliquent donc.

Puis on a associé au programme précédent ($\theta_n \neq 0, \pi$) ces deux derniers programmes : le programme global obtenu est mis sous une forme qui permet d'accéder directement par la valeur de θ_n à l'un de ces trois cas. C'est le programme 7.

Remarque : La quantité $S^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$ appelée SSTAR dans le programme pourra être sortie dans chacun des trois cas précédents en faisant l'indicatif ISSTAR $\neq 0$, en donnée.

ANNEXE F

ENREGISTREMENT D'UN DICTIONNAIRE DES $U_{i,j}$ SUR BANDE MAGNETIQUE

I. GENERALITES.

La connaissance de $S_{f1}(E_T, E, \theta_n)$ telle que

$$S_{f1}(E_T, E, \theta_n) = n_d n_T \sum_{i,j} a_{i,j} U_{i,j}(E_T, E, \theta_n)$$

passe par la connaissance des $U_{i,j}$.

Le programme 7 nous permet de calculer par points les différents $U_{i,j}$.

Il est indispensable de conserver ces résultats et c'est l'objet de l'enregistrement sur bande magnétique.

Cet enregistrement nous permet de mettre en mémoire des courbes de la forme $\sum_{i,j} a_{i,j} U_{i,j}(E_T, E, \theta_n)$.

En pratique on prend tous les $a_{i,j}$, nuls sauf un, égal à 1, ce qui revient à enregistrer les courbes de base. Cependant on se réserve la possibilité d'enregistrement de combinaisons linéaires, désignées par leurs $a_{i,j} \neq 0$.

II. MODALITES PRATIQUES.

Dans un premier moment, un ensemble de 48 courbes de base a été enregistré, permettant le traitement de tirs Focus où des mesures ont été faites à 0 et à $\frac{\pi}{2}$.

Comme la précision de la coïncidence des courbes expérimentales et des spectres théoriques dépend du choix judicieux des courbes de base, suivant les réflexions développées dans le chapitre V de la deuxième partie, nous avons été amenés à prendre les cas suivants :

- un développement en puissance de cos limité à 4 termes, pour tenir compte du fait qu'il n'y a que deux directions d'observation ;
- un développement en puissance de E_d ramené à 2 termes $j = -6$ et $j = 0$, $j = -6$ étant choisi d'après une remarque de BERNSTEIN.

i \ j	-6	0
0	$a_{o,-6}$	$a_{o,o}$
1	$a_{1,-6}$	$a_{1,o}$
2	$a_{2,-6}$	$a_{2,o}$
3	$a_{3,-6}$	$a_{3,o}$

θ_n \ E_T	0	$1,67$	10
0	$0 ; 0$	$1,67 ; 0$	$10 ; 0$
$\frac{\pi}{2}$	$0 ; \frac{\pi}{2}$	$1,67 ; \frac{\pi}{2}$	$10 ; \frac{\pi}{2}$

La constitution de cette bibliotèque de 48 courbes est réalisée par le programme suivant :

Il inscrit successivement sur la bande

a) EDO, EDMAX, ET, TETAN
EDO et EDMAX sont les bornes en E_d, soient E_d^2 et E_d^1.

b) les paramètres relatifs à la fonction f^1 :

$$f^1 = \sum_{i,j} a_{i,j} \cos^i \theta_d \, E_d^{\frac{j}{2}}$$

- le nombre de coefficients $a_{i,j}$
- $a_{ij(1)}, i, j ; a_{ij(2)}, i, j ; a_{ij(3)}, i, j ;$

c) le nombre de valeurs de $S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n)$

d) la colonne des E , la colonne des S.

e) un indicatif de fin de cas.

- il vaut 1 s'il est suivi d'un autre cas ;
- il vaut 0 s'il est le dernier.

Ainsi on pourra créer une bande avec un nombre de cas quelconque et éventuellement la compléter par d'autres cas.

- création d'une bande ;
  mettre l'indicatif IENREG = 1
  et une carte ASSIGN du type "bande à créer".

- prolongation d'un enregistrement ;
  mettre l'indicatif IENREG = 2
  et une carte ASSIGN du type "bande à modifier".

L'indicatif 0 du dernier cas aura été effacé automatiquement par le programme et remplacé par 1 ; le 0 sera placé à la fin du nouveau dernier cas.

Remarque : en cas d'interruption fortuite du programme on trouvera l'indicatif 0 à la fin du dernier cas traité.

ANNEXE G

PROGRAMME D'EXPLOITATION DE LA BANDE : PROGRAMME 8

I. SOMMATION DES $U_{i,j}$

A partir des $U_{i,j}$ on désire réaliser des sommes de la forme

$$\lambda_0 n_d n_\pi \sum_{i,j} a_{i,j} U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n)$$

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n)$$

$$\alpha_{i,j} = \lambda_0 n_d n_\pi a_{i,j}$$

et où l'on veut que les $a_{i,j}$ satisfassent à la relation linéaire :

$$\sum_{i,j} a_{i,j} 2\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} E_d^{\frac{j}{2}} \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d \cos^i\theta_d = \underline{1}$$

On réalise les sommes $\sum_{i,j} a_{i,j} U_{i,j}$ pour un même E_π et un même θ_n.

Remarquons qu'en dehors des courbes de base, on peut enregistrer sur bande des courbes combinées (en $a_{i,j}$) de la forme S_{fi}. Les sommations ne pouvant porter que sur des courbes de base, on ne choisira pour le calcul de ces sommations que des courbes définies par un seul coefficient $a_{i,j}$.

Le nombre de termes constituant la somme est désigné par NALFA et les coefficients $a_{i,j}$ par ALFA.

II. NORMALISATION.

Sous la forme $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n)$ le résultat n'est pas encore exploitable, puisque les coefficients $\alpha_{i,j}$ ne correspondent pas à une fonction $f^1 = \sum_{i,j} a_{i,j} h^1_{i,j}$ normalisée.

Pour normaliser f^1 , nous calculons la somme

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} 2\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} a E_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} E_d^{\frac{j}{2}} \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d \cos^i\theta_d$$

$$= \frac{8\sqrt{2}\pi}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\substack{2\mu \geq 0 \\ j \neq -3}} \frac{\alpha_{2\mu,j}}{(2\mu+1)(3+j)} \left(\left\{E_d^1\right\}^{\frac{3+j}{2}} - \left\{E_d^2\right\}^{\frac{3+j}{2}} \right)$$

$$= N(\alpha_{i,j}) = \sum_{i,j} \gamma_{i,j} \alpha_{i,j} = \lambda_0 n_d n_\pi$$

ce qui justifie les formules (44) et (45) de la deuxième partie (IV.B.2.)

Le spectre correspondant est :

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi N^{-1} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_{i,j}(E_\pi, E, \theta_n)$$

C'est sous cette forme qu'il est formé par le programme 8. Les résultats sont donnés, comme dans le programme 7 précédent, en fonction de E .

III. SORTIE STROMBERG-CARLSON de $\mathcal{S}_{f^1}(E_n, E, \theta_n)$

La sortie STROMBERG-CARLSON est la synthèse de ces différents éléments.

On y trouve affichées les valeurs des paramètres permettant de repérer une courbe donnée.

Nous avons tout d'abord :

- EDO et EDMAX qui correspondent à E_d^2 et E_d^1 où

$$E_d^2 = 50 \text{ keV}$$

$$E_d^1 = 600 \text{ keV}$$

- E2 et E1 qui sont les bornes de l'intervalle de variation de E et qui sont données par la résolution de l'équation (formule (B7)).

$$\widetilde{D}(E_d, E_n, x, \theta_n) = -x^4 + 2\rho\sqrt{\frac{E_d}{2}}\cos\theta_n\, x^3 + x^2\left[\frac{3}{2}Q + \frac{E_d}{2}\left(2 + \rho^2\sin^2\theta_n\right)\right] - x\rho\cos\theta_n\sqrt{\frac{E_d}{2}}\left[\frac{3Q}{2} + \frac{E_d}{2}\left(5 + \beta^2\right)\right] + E_d^2\beta^2 - \left[\frac{3}{4}Q + \frac{E_d}{4}\left(1 + \beta^2\right)\right]^2 = 0$$

où

$$0 \leqslant \theta_n \leqslant \frac{\pi}{2}$$

où

$$x = \sqrt{E}$$

Cette équation possède 4 racines, dont 2 sont positives et deux sont négatives.

Ce sont les deux racines positives qui nous fournissent les bornes de l'intervalle E^2 et E^1, transcrites E2 , E1 dans ce programme.

Nous indiquons ensuite la détermination de f^1 choisie, grâce au jeu des $\alpha_{i,j}$.

A représente la valeur prise par ce coefficient qui est désigné par le jeu des indices i et j .

Nous indiquons en bas du graphique

ET = 0 ; 1,67 ; 10

TETAN = $0, \frac{\pi}{2}$

L = 116,7 ou 120 m, suivant les cas.

Comme les expérimentateurs utilisent une base de temps de vol pour étaler dans le temps les énergies des neutrons émis par une source supposée ponctuelle et instantanée, les spectres enregistrés par photomultiplicateurs sont des spectres en temps. Nous faisons ici un bref rappel de résultats précédemment exposés (IV.B.4.)

La transformation est

$$dE\, S_{fi}(E_T, E, \theta_n) = dt\, \tilde{S}_{fi}(E_T, t, \theta_n)$$

où

$$dt\,,\ dE > 0$$

où

$$E = \frac{1}{2} m \frac{L^2}{t^2}$$

et où L est la longueur de la base de temps de vol (L peut éventuellement varier suivant θ_n).

On rappelle également les formules (51) et (52) de passage du système (E , S) au système ($t, \hat{S}$) et réciproquement:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2E}}\, L_1(\theta_n)$$

$$\tilde{S}_{f1}(E_\pi, t, \theta_n) = S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n)\, \frac{(2E)^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} L_1(\theta_n)}$$

$$E = \frac{1}{2} m \frac{L^2}{t^2}$$

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = \tilde{S}_{f1}(E_\pi, t, \theta_n)\, \frac{t^3}{m L}$$

les courbes en $\tilde{S}$, sont repérées en sortie STROMBERG-CARLSON par t_2 et t_1 ces temps correspondant aux énergies E^2 et E^1.

IV. CONCLUSION.

Le programme d'enregistrement et de traitement de la bande magnétique nous permet, à partir d'un jeu de coefficients $\alpha_{i,j}$, de sortir le spectre associé à la fonction de distribution f^1 normalisée.

Ce spectre peut se présenter sous la forme, soit d'une courbe intrinsèque :

$$E \longrightarrow S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n)$$

où E est en keV et S en une unité arbitraire, soit d'une courbe en temps

$$t \longrightarrow \tilde{S}_{f1}(E_\pi, t, \theta_n)$$

Dans ce cas, le programme appellera T et S^* les valeurs respectives de t, $\widehat{S}$.

Sur la sortie STROMBERG-CARLSON la courbe $\widetilde{S}$ sera accompagnée uniquement de t_2 et t_1 , notés $T2$ et $T1$ qui sont les valeurs de t correspondant à E^2 et E^1 .

ANNEXE H

TESTS DE CONTROLE DE LA PRECISION DES DIVERSES ETAPES DU CALCUL

INTRODUCTION.

Dans ce travail, nous avons eu à calculer deux types d'intégrale.

Premier cas : $\theta_n \neq 0 , \pi$

C'est la formule (16)

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^1}^{E_d^2} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_T) \int_0^{2\pi} \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_T, \theta_n) \delta(E - E_n) d\varphi_d$$

où :

$$E_n = E_n(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_T, \theta_n)$$

Deuxième cas : $\theta_n = 0 , \pi$.

Ce sont les formules (31) et (33) :

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^1}^{E_d^2} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} 2\pi \int_0^\pi d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_\pi) \sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_T, \theta_n) \delta(E - E_n)$$

où :

$$E_n = E_n(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$$

L'utilisation d'une formule analytique nous a permis d'une part de supprimer un étage d'intégration dans les deux cas, mais également de mettre en évidence les symétries qui apparaissent dans les formules pour $\theta_n = 0, \pi$.

Nous sommes ramenés au calcul des deux intégrales suivantes (formules (19) et (21)) :

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi} d\theta_d \sin\theta_d f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_\pi) \left[\frac{2\sigma_d^1(E_d, \theta_d, \varphi_d, E_\pi, \theta_n)}{\left| \frac{\partial E_n}{\partial \varphi_d} \right|} \right]_{\varphi_d = \varphi_d^+(E)}$$

pour $\theta_n \neq 0, \pi$.

$$S_{f1}(E_\pi, E, \theta_n) = n_d n_\pi \int_{E_d^2}^{E_d^1} dE_d \frac{(2E_d)^{\frac{1}{2}}}{(m_d)^{\frac{3}{2}}} 2\pi \sin\theta_d \left[\frac{f^1(E_d, \theta_d)\, g(E_d, \theta_d, E_\pi)\, \sigma_d^1(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)}{\left| \frac{\partial E_n}{\partial \theta_d} \right|} \right]_{\theta_d = \theta_d^E}$$

pour $\theta_n = 0, \pi$.

Nous rappelons que, dans le cas, $\theta_i \neq 0, \pi$, l'introduction de la fonction analytique en E , aboutit à l'introduction de deux pôles ${}^1\theta_d^E$ et ${}^2\theta_d^E$ donnés par les équations :

$$E = E_1(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$$

$$E = E_2(E_d, \theta_d, E_\pi, \theta_n)$$

Le traitement de ces deux singularités a fait l'objet du paragraphe 2 de l'annexe B : on s'est, en particulier, attaché à trouver une majorante de cette intégrale au voisinage des asymptotes (Annexe B, sous paragraphe 2-c).

Pour $\theta_\pi = o, \pi$, il n'y a pas de point à l'infini, comme on l'a montré dans l'annexe C.

De tous ces calculs analytiques, il en est résulté un certain nombre de tests, que nous allons présenter maintenant dans l'ordre chronologique.

I. BRANCHES INFINIES DE $\mathcal{S}^*$. CONVERGENCE.

Premier test : Etude des branches infinies de $\mathcal{S}^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$
Calcul de $\mathcal{S}^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$

Le calcul de $\mathcal{S}$ comporte comme étape intermédiaire le calcul de la quantité $\mathcal{S}^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n)$. Au sous-paragraphe 2-c de l'annexe B, nous avons trouvé une majorante de l'intégrale dans l'intervalle $\left[{}^1\theta_d^\varepsilon , {}^1\theta_d^\varepsilon + \varepsilon \right]$ c'est-à-dire au voisinage de l'asymptote :

$$2(\lambda \mu \nu)_{\theta_d = {}^1\theta_d^\varepsilon} \times \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{S}^*(E_d, E_\pi, E, \theta_n) = \int_{{}^1\theta_d^\varepsilon}^{{}^1\theta_d^\varepsilon} d\theta_d \sin\theta_d \, f^1(E_d, \theta_d) g(E_d, \theta_d, E_\pi) \mathcal{S}^*(E_d, \theta_d, E_\pi, E, \theta_n)$$

nous avons écrit

$$\int_{{}^1\theta_d^\varepsilon}^{{}^1\theta_d^\varepsilon + \varepsilon} d\theta_d \sin\theta_d \, f^1 g \, \mathcal{S}^* \sim 2(\lambda\mu\nu) \, \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Le problème est la détermination de ε tel que ce reste soit suffisamment petit devant S^*.

On commence par intégrer en θ_α en utilisant une méthode de SIMPSON où l'on prend deux pas d'intégration :

$$\Delta\theta_\alpha \simeq \frac{{}^2\theta_\alpha^\varepsilon - {}^1\theta_\alpha^\varepsilon}{100}$$

$$\delta\theta_\alpha = \frac{\Delta\theta_\alpha}{100} = \frac{\Delta\theta_\alpha}{n}$$

L'intervalle d'intégration est alors décomposé en trois intervalles $\left[{}^1\theta_\alpha^\varepsilon , \theta_\alpha^i\right]$, $\left[\theta_\alpha^i , \theta_\alpha^f\right]$, $\left[\theta_\alpha^f , {}^2\theta_\alpha^\varepsilon\right]$, dans lesquels le pas est respectivement

$$\delta\theta_\alpha , \Delta\theta_\alpha , \delta\theta_\alpha$$

On s'efforce de déterminer ε , de l'ordre de $\delta\theta_\alpha$, tel que l'on ait, pour E_α, E_π, E et θ_n données :

$$2\left(\lambda\mu\nu\right)_{\theta_\alpha \simeq {}^1\theta_\alpha^\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \simeq \left(\delta\theta_\alpha \sin\theta_\alpha f^1 g\, S^*\right)_{\theta_\alpha \simeq {}^1\theta_\alpha^\varepsilon} \simeq \left(\Delta\theta_\alpha \sin\theta_\alpha f^1 g\, S^*\right)_{\theta_\alpha \simeq \frac{\pi}{2}}$$

La détermination de ε équivaut à la détermination de n , donc d'un découpage fin des extrémités de l'intervalle d'intégration.

L'intégration par la méthode de SIMPSON pour

$$E_\alpha = 100 \quad , \quad E_\pi = 0 \quad , \quad \theta_n = \frac{\pi}{2} \quad , \quad E = 2600$$

nous a alors donné les résultats suivant :

$${}^2\theta_\alpha^\varepsilon = 2{,}78755520$$

$${}^1\theta_\alpha^\varepsilon = 0{,}35403737$$

donc :

$$\Delta\theta_d = 0,0243$$

on a été amené à prendre :

$$n = 1000$$

$$\delta\theta_d = 2 \times 10^{-5}$$

et

$$\varepsilon = 3 \times 10^{-5}$$

dans ces conditions on a

$$S^* = 0,10022 \times 10^{-26}$$

$^1\theta_d^E = 0,35403737$	$\varepsilon = 3\times10^{-5}$	$2(\lambda\mu\nu) = 1,42110\times10^{-27}$	$2(\lambda\mu\nu)\sqrt{\varepsilon}$	$= 0,7784\times10^{-29}$
$\theta_d = 0,35406737$	$\delta\theta_d = 2\times10^{-5}$	$2(\lambda\mu\nu) = 1,45 \times10^{-27}$	$(\delta\theta_d \sin\theta_d f^1 g S^*)$	$= 0,1181\times10^{-29}$
$\theta_d = 1,570$	$\Delta\theta_d = 2,43\times10^{-2}$	$2(\lambda\mu\nu) = 0,688 \times10^{-29}$	$(\Delta\theta_d \sin\theta_d f^1 g S^*)$	$= 0,5237\times10^{-29}$

L'intégration par la méthode de SIMPSON, nous ayant permis de calculer cette valeur de référence de S^* , nous avons entrepris d'appliquer une méthode de GAUSS-LEGENDRE, particulièrement bien adaptée dans le cas de pôle.

Dans cette méthode on décompose l'intervalle d'intégration en trois parties représentant 1/100, 98/100, 1/100 de l'intervalle total, les nombres de points par intervalles étant respectivement :

$$N(1) = 64$$

$$N(2) = 40$$

$$N(3) = 64$$

Le principe de la méthode a été brièvement exposé dans le texte, le programme correspondant se nomme INPAR.

Pour étudier la convergence de cette méthode nous avons fait divers essais en changeant les découpages des trois intervalles d'intégration.

La méthode de GAUSS-LEGENDRE donne comme valeur de l'intégrale :

$$S^{*} = 0,10058 \times 10^{-26}$$

Ceci correspond à un écart de 3×10^{-3} avec SIMPSON, qui nous a semblé suffisant pour la précision que nous souhaitions pour S .

II. CALCUL COMPLET DE S_{fi}.

Deuxième test : Passage à l'intégrale double, bornes variables.

Dans une première version du calcul, on a appliqué la méthode de GAUSS-LEGENDRE pour l'intégrale en θ_d et on est revenu à une méthode de SIMPSON pour l'intégrale en E_d .

Nous avons tout d'abord pris un pas en E_d de :

$$\Delta E_d = 27,5 \text{ keV}$$

soit un découpage de l'intervalle (50 - 600 keV) en 20 parties, puis un pas de

$$\Delta E_d = 13,75$$

Dans une seconde version, l'intégrale double se calcule par une méthode de GAUSS-LEGENDRE. Après quelques essais et comparaisons, le découpage en E_d optimum nous a paru être

$$N(1) = 10$$

$$N(2) = 10$$

$$N(3) = 10$$

avec comme intervalles respectifs 1/4, 1/2, 1/4.

Un nouveau raffinement de cette méthode a consisté à rendre variable les bornes en E_d, c'est-à-dire à introduire la quantité E_d^E du paragraphe 3 de l'annexe B.

La comparaison des deux versions du calcul nous donne un écart de 5×10^{-2}.

III. TEST D'ISOTROPIE.

Troisième test : Test d'isotropie pour $E_\pi = 0$, $\theta_n = 0 , \frac{\pi}{2}$ et diverses valeurs de $f_{0,j} (j = 0, -6, -8)$

On a choisi comme méthode de calcul définitive de $S(E_\pi, E, \theta_n)$ la méthode GAUSS-LEGENDRE, appliquée à une intégrale double (double INPAR) pour $\theta_n \neq 0 , \pi$

Dans les cas $\theta_n = 0, \pi$, on rappelle qu'on a une intégrale simple traitée par GAUSS-LEGENDRE.

Il s'agit de vérifier la formule :

$$U_{0,j}(0, E, 0) = U_{0,j}(0, E, \frac{\pi}{2})$$

Les deux expressions à intégrer sont, du point de vue du calcul numérique, radicalement différentes : la première est une intégrale double d'une fonction comportant deux pôles, la seconde est une intégrale simple d'une fonction sans pôle.

Cette intégrale simple porte sur une fonction lentement variable. Nous estimons que, dans ce cas, l'erreur de calcul est négligeable. Nous prenons donc ces valeurs comme valeurs de référence.

Le tableau suivant montre la comparaison des deux méthodes de calcul, dans le cas isotrope $\lambda = 0$, $E_T = 0$ pour différentes valeurs de j et deux valeurs de E .

j	E	θ_n	S
- 8	1 900	0	0, 3 6 4 4 4 E - 3 6
		$\frac{\pi}{2}$	0, 3 6 4 1 2 E - 3 6
	2 600	0	0, 1 4 6 5 2 E - 3 4
		$\frac{\pi}{2}$	0, 1 4 6 4 3 E - 3 4
- 6	1 900	0	0, 1 9 2 2 1 E - 3 3
		$\frac{\pi}{2}$	0, 1 9 2 0 4 E - 3 3
	2 600	0	0, 1 6 1 8 0 E - 3 2
		$\frac{\pi}{2}$	0, 1 6 1 7 4 E - 3 2
0	1 900	0	0, 2 8 7 5 2 E - 2 5
		$\frac{\pi}{2}$	0, 2 8 7 2 6 E - 2 5
	2 600	0	0, 2 2 8 3 6 E - 2 5
		$\frac{\pi}{2}$	0, 2 2 8 3 1 E - 2 5

Cette comparaison montre clairement que l'erreur relative est de l'ordre de 10^{-3}.

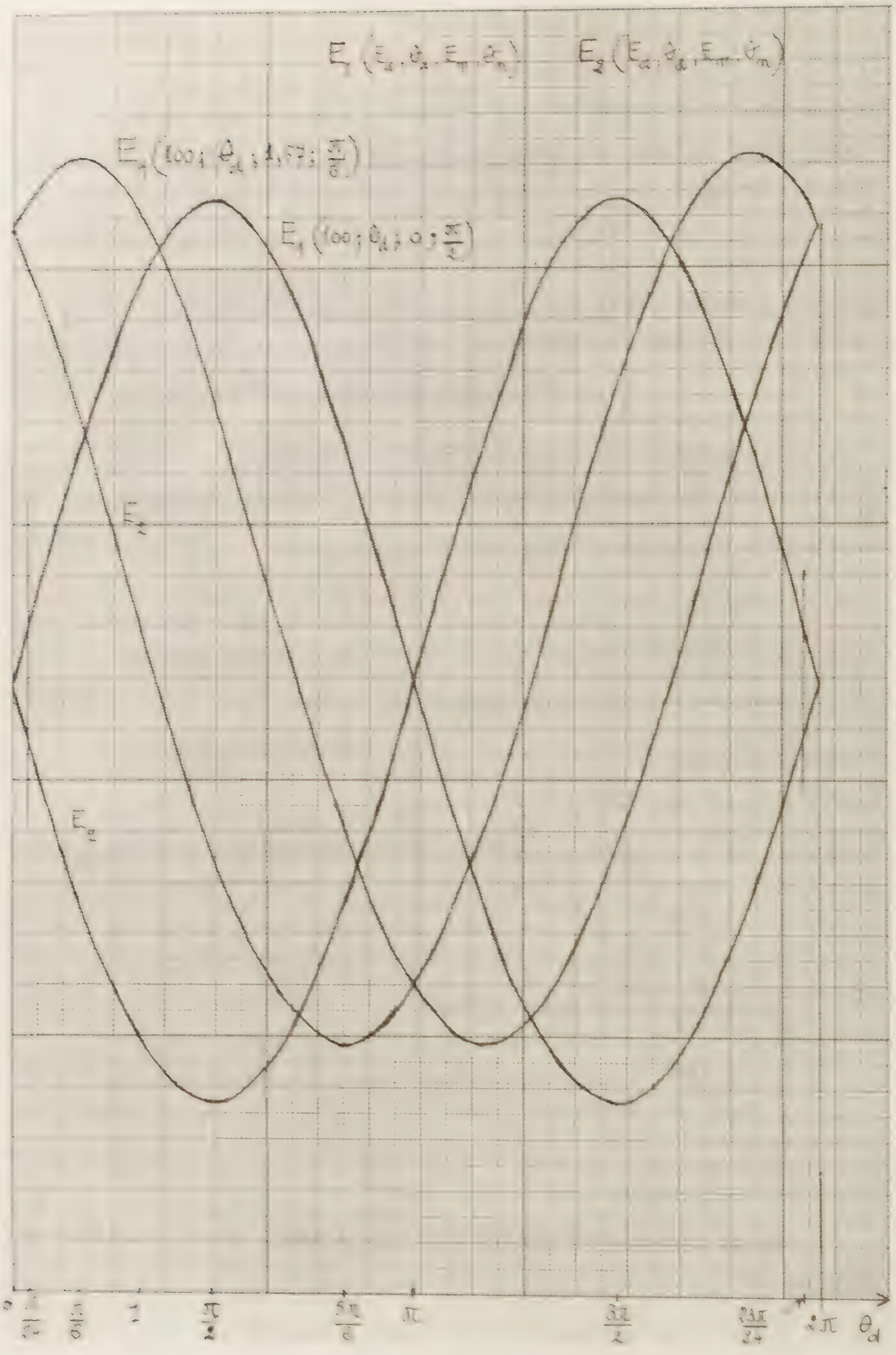


Fig. H1 : Courbes E_1 et E_2

IV. ANNULATION DES $U_{2i+1,j}\left(0, E, \frac{\pi}{2}\right)$

Cette identité à zéro a été démontrée lors de l'étude de la relation de récurrence au paragraphe 1 de l'annexe D.

On peut constater en comparant, par exemple $U_{0,j}\left(0, E, \frac{\pi}{2}\right)$ et $U_{1,j}\left(0, E, \frac{\pi}{2}\right)$ pour différentes valeurs de j , que

$$\frac{U_{1,j}\left(0, E, \frac{\pi}{2}\right)}{U_{0,j}\left(0, E, \frac{\pi}{2}\right)} \simeq 10^{-5}$$

V. VERIFICATION DES PROPRIETES DES COURBES E_1 et E_2 .

Pour vérifier les propriétés de ces courbes démontrées analytiquement (sens de variation, nombre d'extremums), nous avons fait construire numériquement ce domaine. On retrouve bien les propriétés annoncées (voir fig. H 1).

Le calcul a été fait pour

$E_d = 100 keV$ $\quad E_T = 1,67$ $\quad \theta_n = \frac{\pi}{6}$

$E_d = 100 keV$ $\quad E_T = 0$ $\quad \theta_n = \frac{\pi}{2}$

VI. VERIFICATION DES PROPRIETES DE $D(E_d, E_T, E, \theta_n)$

L'étude analytique ayant permis de déterminer le signe des racines, on a demandé deux types de résolution :

- Résolution en E , pour $E_T = 1,67$ keV, $E_d = 100$ keV et pour $\theta_n = \frac{n\pi}{12}$ pour $n = 0, 1, \ldots, 12$.

On a bien vérifié qu'à chaque fois il existait deux racines positives et deux racines négatives :

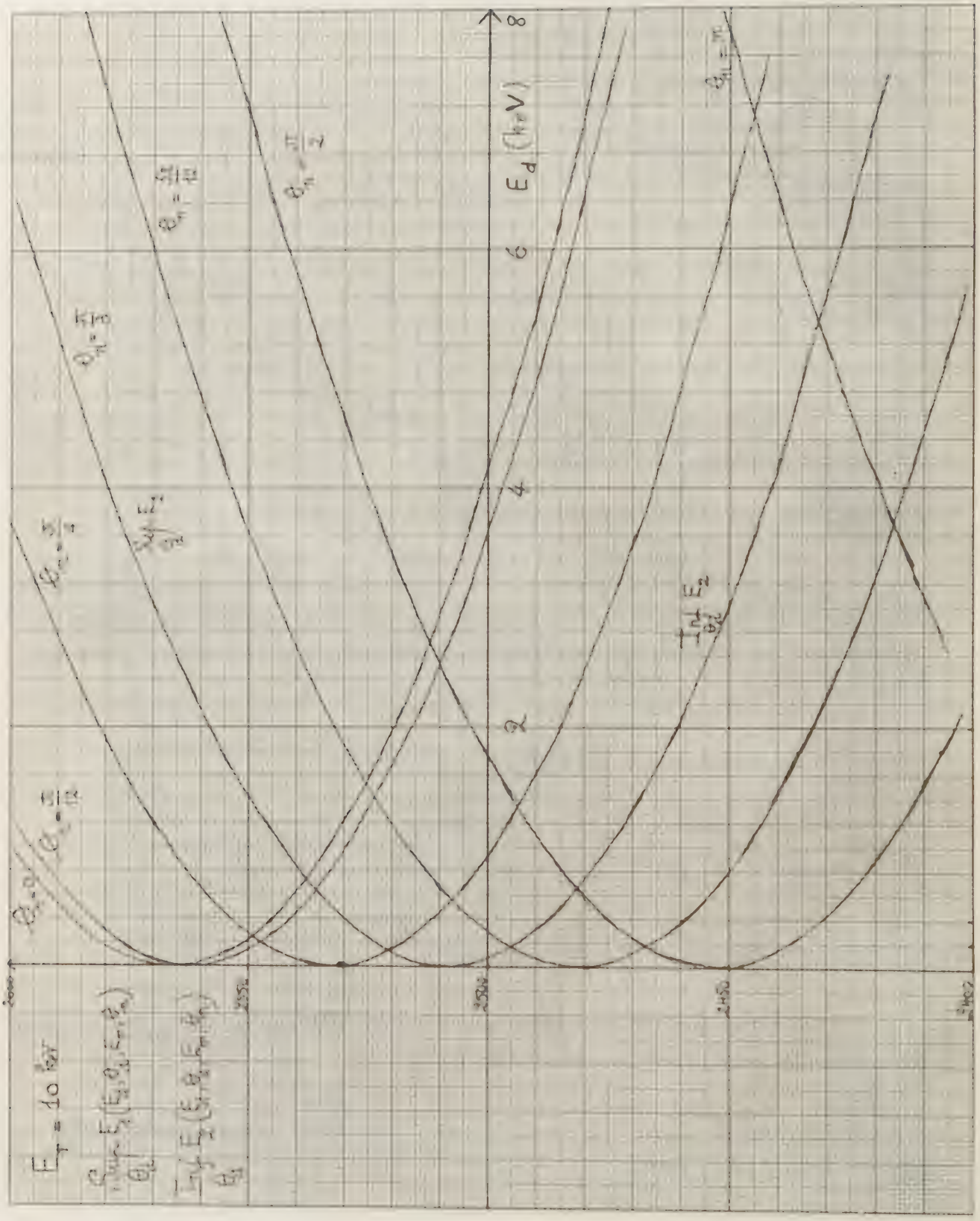


Fig. H 2 : Courbes $\mathcal{D}\left(E_d, 10, E, \theta_n\right) = 0$ pour $\theta_n = k\frac{\pi}{12}$

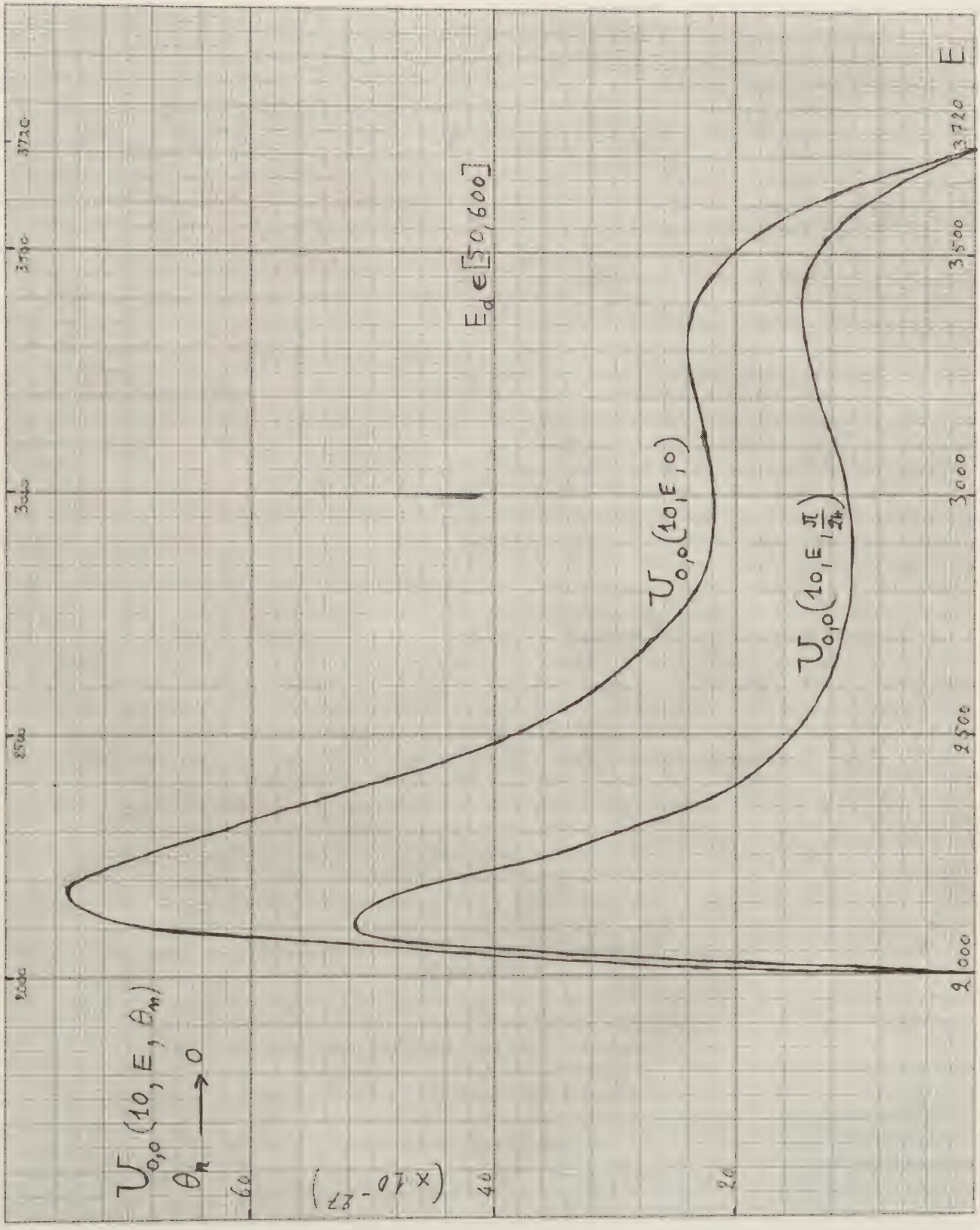


Fig H 3 : $U_{0,0}\left(10, E, \frac{\pi}{2n}\right)$, $U_{0,0}(10, E, 0)$

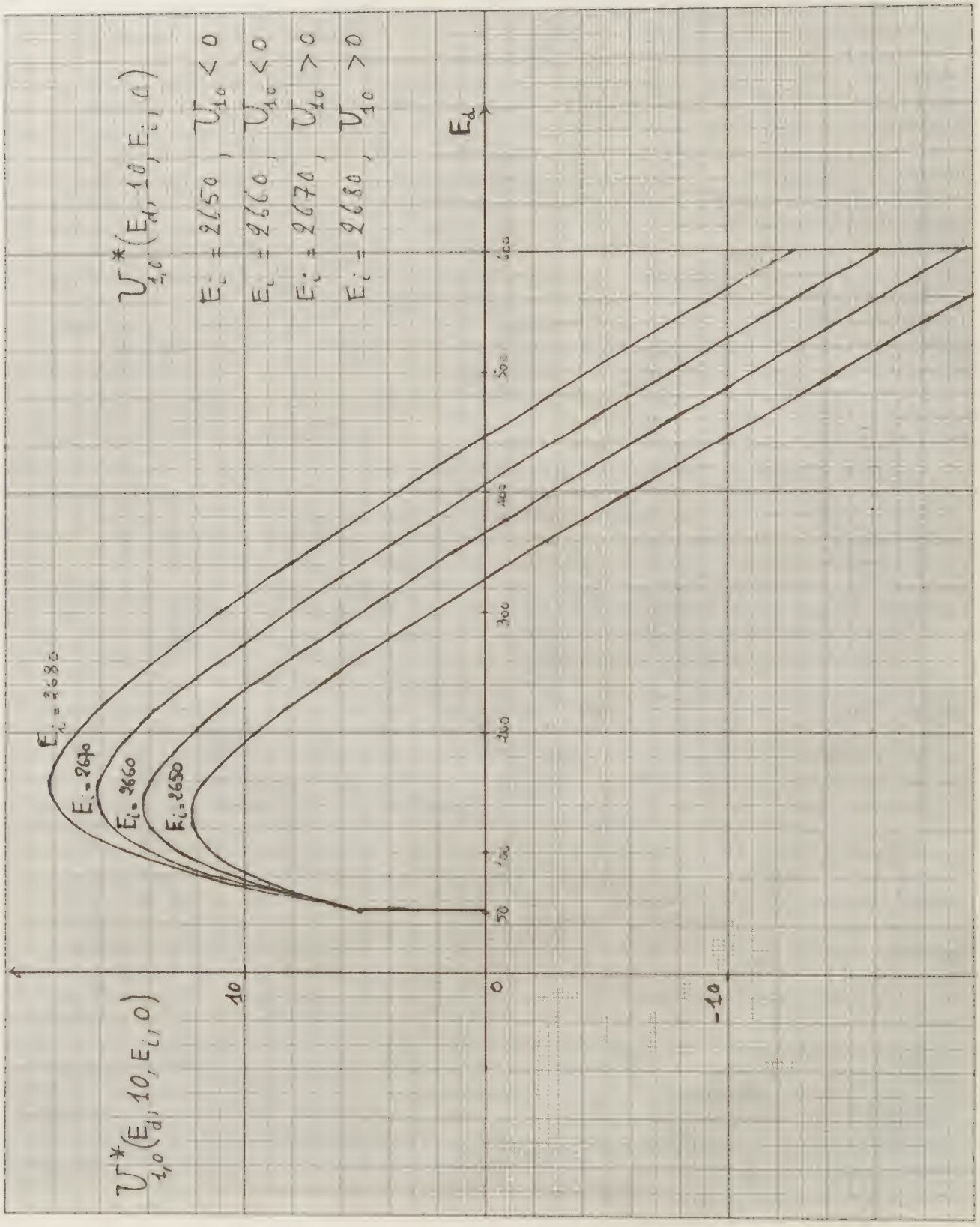


Fig. H 4 : $U^*_{1,0}(E_d, 10, E_i, 0)$

- Courbes de E en fonction de E_d , pour $E_\pi = 10$, et $\theta_n = \frac{n\pi}{12}$ ($n = 0, 1, \ldots, 12$). Le réseau des courbes (E_d, E) permet d'étudier l'intégrale en E_d. Les cas $\theta_n = 0$, $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_n = \pi$ ont été étudiés particulièrement.

- L'étude de ces courbes de E en fonction de E_d ayant fait apparaître qu'elles ne coupaient pas l'axe, une étude analytique plus poussée à permis effectivement de mettre en évidence la tangente à l'axe $E_d = 0$ de ces différentes courbes (voir fig. H2).

VII. INEGALITES ENTRE LES $U_{i,j}$

Pour construire les courbes $U_{i,j}$ à $E_T = 0$ et à $E_T = 10$, nous avons utilisé les constatations du sous-paragraphe 1-b de l'annexe D. En fait, nous avons procédé à l'inverse, les courbes et leurs aspects nous ayant suggéré d'étudier les inégalités (cf. fig. 10 à 17).

VIII. CONTINUITE EN θ_n

Pour ce faire nous avons construit la courbe $U_{0,0}(10, E, \frac{\pi}{24})$ que nous avons comparée à $U_{0,0}(10, E, 0)$, cela revient à comparer deux intégrales différentes et à vérifier la convergence, quand $\theta_n \to 0$ (fig. H 3).

IX. CONSTRUCTION DES $U^*_{i,j}$ EN FONCTION DE E_d

Pour suivre les variations de $U_{i,j}(E_T, E, \theta_n)$ en fonction de E, maximums ou zéros, on a été amené à construire pour E donné les courbes $U^*_{i,j}(E_d, E_T, E, \theta_n)$ en fonction de E_d, ceci pour étudier l'intégration en E_d.

Exemples :

Cas $\theta_n = 0$, la courbe $U_{1,0}(10, E, 0)$ coupe les E en une valeur approximative de 2 665 keV. On a construit le réseau de courbes $U^*_{1,0}(E_d, 10, E_i, 0)$ en fonction de E_d pour $E_i = 2\,650$, $2\,660$, $2\,670$, $2\,680$ (fig. H 4).

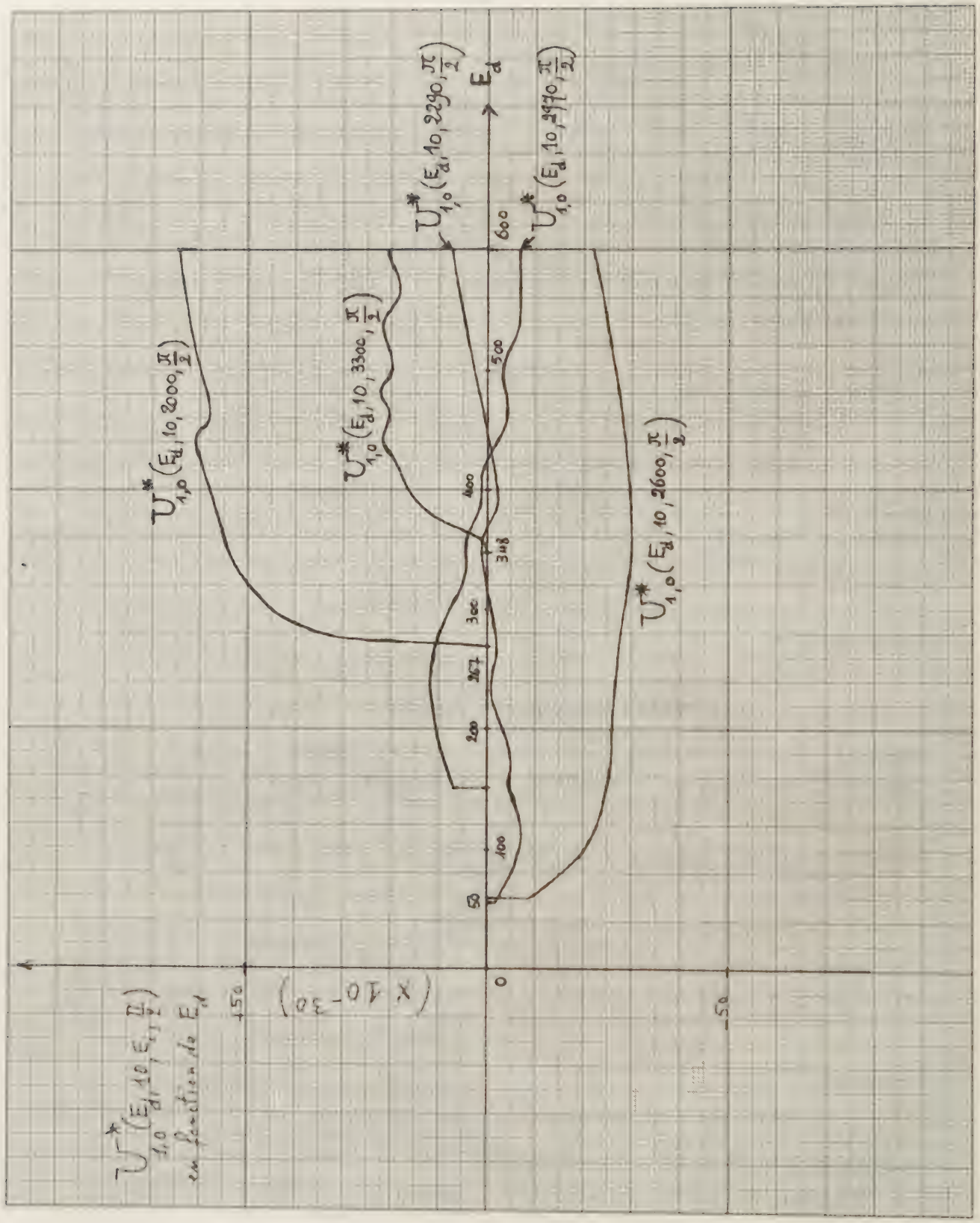


Fig. H 5 : $\bar{U}^*_{1,0}\left(E_d, 10, E_d, \frac{\pi}{2}\right)$

Cas $\theta_n = \frac{\pi}{2}$. La courbe $U_{1,0}\left(10, E, \frac{\pi}{2}\right)$ coupe l'axe en deux points : approximativement 2 290 keV et 2 970 keV. On a construit les courbes $U^*_{1,0}(E_d, 10, 2\,290, \frac{\pi}{2})$ et $U^*_{1,0}(E_d, 10, 2\,970, \frac{\pi}{2})$.

Les courbes $U^*_{i,j}\left(E_d, E_\pi, E, \theta_n\right)$ en fonction de E, représentent les spectres d'émission neutronique correspondant à une injection de deutérons monocinétiques (fig. H5).

CONCLUSION.

De tous ces éléments, on peut en déduire une erreur de 10^{-3} au maximum sur le calcul des $U_{i,j}\left(E_\pi, E, \theta_n\right)$.

ANNEXE I

COMPARAISON QUANTITATIVE AVEC L'EXPERIENCE - DISCUSSION

I. UTILISATION D'UNE METHODE DE CALCUL SYSTEMATIQUE : METHODE DES MOINDRES CARRES.

I.a. Rappel (sous-chapitre IV-B de la deuxième partie).

L'équation

$$S_M = \lambda S_{f^1}$$

n'admet pas de solution exacte et on doit donc se rabattre sur une méthode d'approximation.

Nous avons choisi la méthode très classique des moindres carrés. Pour la mettre en oeuvre, nous posons

$$\varepsilon_\nu = (E_\mu, \theta_q)$$
$$\nu = (\mu, q)$$

et nous prenons

$$\theta_n \in \{\theta_q\}$$

$$E \in \{E_\mu\}$$

On aura par exemple, pour $E_\pi = 0$

$$\theta_n = 0, \frac{\pi}{2}$$

$$E = E^2, 1900, 2000, \ldots, 3600, E^1$$

où

$$E^2 = 1854,18$$

$$E^1 = 3645,82$$

Nous avons appelé $\xi(E_\pi)$ la quantité (formule 53)

$$\xi(E_\pi) = \sum_{p,q} \left[S_M^\circ(E_p, \theta_q) - \lambda_o \sum_{i,j} a_{i,j} n_d n_\pi U_{i,j}(E_\pi, E_p, \theta_q) \right]^2$$

En posant

$$k = (i,j)$$

$$\xi(E_\pi) = \sum_{r} \left[S_M^\circ(\varepsilon_r) - \lambda_o n_d n_\pi \sum_k a_k U_k(E_\pi, \varepsilon_r) \right]^2$$

avec la relation (voir annexe G, paragraphe 2).

$$\sum_k a_k \gamma_k = 1$$

I.b. Mise en oeuvre - Système d'équations linéaires - Problèmes d'ordre de grandeur.

I.b.α. Système d'équations linéaires

Nous rappelons ici sommairement les étapes essentielles de la résolution.

Le système linéaire (54) provient de l'annulation des différentes dérivées partielles $\frac{\partial \xi(E_\pi)}{\partial a_\ell}$ où

$$\alpha_\ell = \lambda_o n_d n_\pi a_\ell \qquad \ell \in \{k\}$$

$$\xi(E_\pi) = \sum_r \left[S_M^{\circ}(\varepsilon_r) - \sum_k \alpha_k U_k(E_\pi, \varepsilon_r) \right]^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha_\ell} = \sum_r U_\ell(E_\pi, \varepsilon_r) \left[S_M^{\circ}(\varepsilon_r) - \sum_k \alpha_k U_k(E_\pi, \varepsilon_r) \right] = 0$$

Ce que nous écrivons

$$\sum_k \alpha_k \sum_r U_\ell(E_\pi, \varepsilon_r) U_k(E_\pi, \varepsilon_r) = \sum_r U_\ell(E_\pi, \varepsilon_r) S_M^{\circ}(P_o, \varepsilon_r)$$

$$\ell \in \{k\}$$

On a autant d'équations que d'inconnues :

$k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ on aura $1 = 0, 1, 2, \ldots, m-1$

La résolution de ce système, nous donne les valeurs des α_k c'est-à-dire des $\alpha_{i,j}$

$$\alpha_{i,j} = \lambda_o n_d n_\pi a_{i,j}$$

On remarque, alors que, si on pose,

$$N(a_{i,j}) = \sum_{i,j} \gamma_{i,j} a_{i,j} = 1$$

On peut écrire

$$N(\alpha_{i,j}) = \lambda_0 \pi_1 \pi_2$$

et qu'en conséquence,

$$f^1 = N^{-1} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} h^1_{i,j}$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont les solutions du système linéaire (54).

I.b.β. Ordre de grandeur.

La résolution numérique de ce système d'équations nécessite un ajustement des ordres de grandeur.

En effet les quantités $U_{i,0}$, $U_{i,-6}$, $U_{i,-8}$, $U_{i,-12}$ sont respectivement de l'ordre de 10^{-27}, 10^{-34}, 10^{-36}, 10^{-38} compte tenu des unités choisies.

L'équation à résoudre se présentant théoriquement sous la forme

$$S^0_M(\xi, \varepsilon_n) - \lambda_0 \pi_1 \pi_2 \sum_{i,j} a_{i,j} U_{i,j} = 0$$

nous sommes conduits à la résoudre sous la forme

$$S^0_M(\xi, \varepsilon_n) - \sum_{i,j} \overline{a_{i,j}}\ \overline{U_{i,j}} = 0$$

où la quantité $\overline{U_{i,j}}$ prend les valeurs suivantes

$$j = 0 \qquad \overline{U}_{i,j} = 10^{27}\, U_{i,j}$$

$$j = -6 \qquad \overline{U}_{i,j} = 10^{34}\, U_{i,j}$$

$$j = -8 \qquad \overline{U}_{i,j} = 10^{36}\, U_{i,j}$$

$$j = -12 \qquad \overline{U}_{i,j} = 10^{38}\, U_{i,j}$$

les $\overline{\alpha_{i,j}}$ sont les solutions du système (54), où on remplace $U_{i,j}$ par $\overline{U}_{i,j}$
Nous poserons par ailleurs :

$$j = 0 \qquad \beta_{i,j} = \overline{\alpha_{i,j}} \times 10^{-11}$$

$$j = -6 \qquad \beta_{i,j} = \overline{\alpha_{i,j}} \times 10^{-4}$$

$$j = -8 \qquad \beta_{i,j} = \overline{\alpha_{i,j}} \times 10^{-2}$$

$$j = -12 \qquad \beta_{i,j} = \overline{\alpha_{i,j}} \times 10^{0}$$

Par identification

$$\sum_{i,j} \overline{\alpha_{i,j}}\, \overline{U_{i,j}} = \sum_{i,j} \beta_{i,j}\, 10^{38}\, U_{i,j} = \sum_{i,j} \lambda_0 n_d n_\pi a_{i,j} U_{i,j}$$

on en déduit :

$$\beta_{i,j} = 10^{-38}\, \lambda_0 n_d n_\pi a_{i,j}$$

et nous sommes amenés à former la quantité

$$10^{-38}\ N^{-1}(\beta_{i,j})\Big(\sum_{i,j}\overline{\alpha_{i,j}}\ \overline{U_{i,j}}\Big)$$

$$= 10^{-38}\times\frac{10^{38}}{\lambda_0 n_d n_\pi}\times\Big(\sum_{i,j}10^{-38}\lambda_0 n_d n_\pi a_{i,j}\,10^{38}U_{i,j}\Big)$$

$$= \sum_{i,j}a_{i,j}U_{i,j}$$

par multiplication par $n_d n_\pi$ nous obtiendrons bien le spectre cherché.

II. PROGRAMME DE CALCUL DES COEFFICIENTS $\beta_{i,j}$ PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES A E_τ FIXE.

II.a. Rappel des différents calculs effectués. Passage du temps en énergie.

Comme il a été expliqué précédemment nous partons pour effectuer notre dépouillement de deux ou trois spectres expérimentaux qui sont des spectres en temps.

En définitive nous obtenons $\widehat{S}_M(t,\theta_n)$ le spectre en fonction du temps dans une direction θ_n sous la forme d'une suite de points, dont les abscisses sont les temps correspondant à une échelle linéaire en énergie, avec un ΔE de 100 keV (1800, 1900, 2000, ..., 3200, 3300, 3400, ...) et dont les ordonnées sont données en centimètres.

Nous avons toujours travaillé sur le spectre en énergie (considéré comme intrinsèque par rapport au spectre en temps qui dépend de la distance). En particulier la quantité ξ porte sur l'énergie. Il nous faut donc préalablement à toute opération, transformer le spectre en temps en spectre en énergie.

Soit $\hat{S}_M(t, \theta_n)$ le spectre en temps mesuré en centimètre ou en volt. La première opération effectuée est donc :

$$S_M(E, \theta_n) = \hat{S}_M(t, \theta_n) \frac{m^{\frac{1}{2}}}{(2E)^{\frac{3}{2}}} T_1(\theta_n)$$

II.b. Intervention de $\lambda(E, \theta_n)$

Le spectre est mesuré à la distance $T_1(\theta_n)$ de la source; si on le ramène à l'origine, on a vu qu'on peut écrire (2ème partie, § IV.B.2)

$$S^0_M(E, \theta_n) = K^{-1}(E, \theta_n) S_M(E, \theta_n)$$

où

$$K(E, \theta_n) = \frac{\lambda_0^{-1}}{4\pi \{L(\theta_n)\}^2} a(\theta_n) r(E, \theta_n) e^{-\alpha(E) L(\theta_n)}$$

$a(\theta_n)$ facteur de conversion volt/photon de la chaîne de mesure

$r(E, \theta_n)$ réponse en nombre moyen de photons produits dans le scintillateur par une fluence de 1 neutron/cm2.

α coefficient d'atténuation à l'énergie E

$$\alpha = \mu \rho$$

μ est donné en cm2/g.

ρ masse spécifique de l'air, en g/cm3.

Les valeurs de ces coefficients seront définies dans l'annexe J.

La quantité $K(E,\theta_n)$ est obtenue en calculant le coefficient λ_o^{-1} donc en prenant pour référence la direction $\frac{\pi}{4}$.
Dans l'exponentielle $L_1(\theta_n)$ doit être exprimée en cm.

II.c. Calcul des $\beta_{i,j}$

Il s'effectue comme il a été indiqué au paragraphe I.b., après transformation des $U_{i,j}$ à l'entrée. En sortie, on obtient les $\beta_{i,j}$ après transformation des $\bar{\alpha}_{i,j}$ résultats du calcul, par les formules du sous-paragraphe I.b.β.

Le calcul s'effectue par la méthode de GAUSS-SEIDEL : inversion matricielle.

Nous ferons quelques remarque sur ce calcul, vu que le système de vecteurs de base choisi n'est pas orthogonal en $\overline{U}_{i,j}$.

On rappelle que les $\bar{\alpha}_{i,j}$ s'obtiennent par minimisation de la quantité

$$\xi(E_n) = \sum_{E,\theta_n} \left[S_M^o - \lambda_o S_{f1} \right]^2$$

où

$$\lambda_o S_{f1} = \sum_{i,j} \bar{\alpha}_{i,j} \overline{U}_{i,j}$$

ce que nous avons expliqué au paragraphe I.b.β.

II.d. Sortie de courbes S

Connaissant les $\overline{\alpha_{i,j}}$ on peut construire les courbes $\lambda_0 S_{f1}$ par points et pour les 3 directions 0 , $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$.

On va réaliser un tableau comparatif où pour chaque angle θ_n , figureront d'une part les valeurs de E utilisées, par centaine de keV, les valeurs de $S^0_M(E,\theta_n)$ obtenues après la transformation du paragraphe I.b.β ., et enfin le résultat du calcul de $\sum_{i,j} \overline{\alpha_{i,j}}\,\overline{U_{i,j}}$.

A la fin de cette opération, on calculera $\xi(E_\tau)$, $\sum_{E,\theta_n}(S^0_M)^2$ et enfin $\xi \Big/ \sum (S^0_M)^2$.

II.e. Sortie de courbes $\tilde{S}$.

Les courbes expérimentales dépendant du temps et leurs ordonnées étant mesurées en centimètres, il est agréable de revenir à ce système pour faire la comparaison directe à l'expérience. C'est ce que nous réalisons en exécutant la transformation inverse de la précédente.

L'échelle des abscisses reste la même que précédemment (énergies).

$$\lambda_0 \tilde{S}_{f1} = \left(\lambda_0 S_{f1}\right) \frac{(2E)^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} L} \qquad J = \frac{m^{\frac{1}{2}} L}{(2E)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tilde{\xi}(E_\tau) = \sum_{E,\theta_n} \left[\tilde{S}_M - \lambda_0 K S_{f1} \frac{(2E)^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} L} \right]^2$$

Le tableau comparatif comporte donc des énergies en abscisse, $\tilde{S}_M$ et $\lambda_0 K \tilde{S}_{f1}$ en ordonnées. On calcule ensuite $\tilde{\xi}$, $\sum_{E,\theta_n}(\tilde{S}_M)^2$ et le rapport $\tilde{\xi} \Big/ \sum (\tilde{S}_M)^2$.

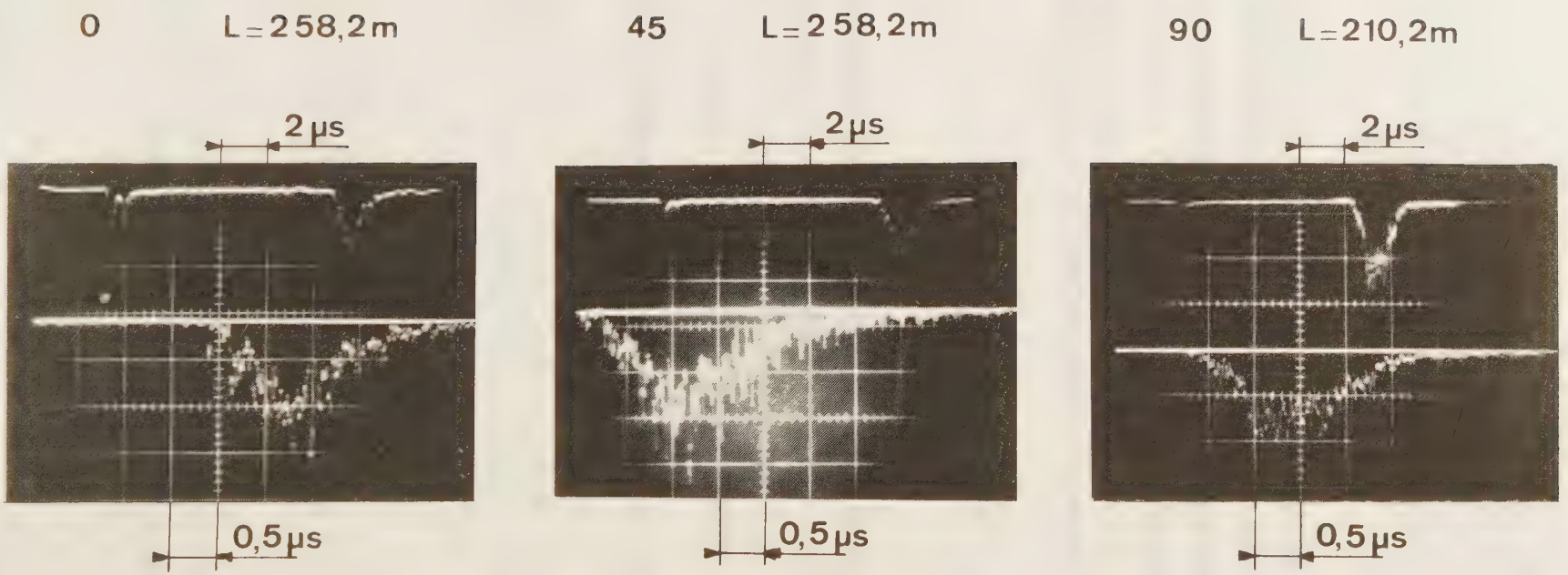


Fig. I 1 : Oscillogrammes du tir 264 effectué à MORONVILLIERS

II.f. Sortie STROMBERG.

Pour visualiser ces derniers résultats, on trace pour chaque angle θ_n en fonction du temps (donc pour les valeurs de t correspondant aux diverses valeurs de l'échelle linéaire en énergie) par points $\widetilde{S}(t, \theta_n)$ et $KJ^{-1}\lambda_0 S_{f1}$.

Connaissant les valeurs $\beta_{i,j}$ on peut tracer

$$f^1(E_d, \theta_d) = \sum_{i,j} \beta_{i,j} E_d^{\frac{j}{2}} \cos^i \theta_d$$

On ajoute cette courbe aux trois courbes précédentes, 0 , $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$.

III. RESULTATS PRATIQUES.

Nous prenons le dépouillement d'un tir effectué à MORONVILLIERS (fig. I.1). Nous indiquerons par la suite, comment sont dépouillés manuellement les spectres expérimentaux. Ils se présentent sous la forme de la figure ci-contre et certaines opérations préliminaires sont nécessaires pour les adapter au calcul. Supposons ces opérations réalisées, nous avons donc trois tableaux de nombre ($0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$) assimilables par la machine.

Les résultats du calcul se présentent alors de la manière suivante :

E_d^2 , E_d^1 , E_π , j

$K(E, \theta_n)$ en fonction de θ_n et de E .

Tableau des coefficients du système de résolution en $\bar{\alpha}_{i,j}$.
Valeur du déterminant du système .

E , $S_M^0(E, \theta_n)$, $\lambda_0 S_{f1}$ $\quad$ E , $S_M(E, \theta_n)$, $K\lambda_0 S_{f1}$

ξ , $\sum (S_M^0)^2$, $\xi / \sum$

E , $\widetilde{S}^{0}_{M}(t, \theta_n)$, $\lambda_0 \widetilde{S}_{f1}$ $\qquad$ E , $\widehat{S}_M(t, \theta_n)$, $K\lambda_0 \widetilde{S}_{f1}$

$\widetilde{\xi}$, $\sum (\widetilde{S}_M)^2$, $\widetilde{\xi} / \sum$

$\beta_{i,j}$

$\Phi(E_\pi, \theta_n)$

Les flux sont obtenus à n_d n_π près en calculant la quantité

$$10^{-38} \times N^{-1}(\beta_{i,j}) \times 10^{-4} \times \int_{E^2}^{E^1} \left(\sum_{i,j} \overline{\alpha}_{i,j} \overline{U}_{i,j} \right) dE$$

REFERENCES

/1/ J.W. MATHER
Formation of a High-Density Deuterium Plasma Focus
Physics of Fluids, vol. 8, n° 2, 1965, p. 366

/2/ C. PATOU, A. SIMONNET, J. P. WATTEAU
Dynamique et émission neutronique d'une décharge électrique non-cylindrique focalisante
Le Journal de Physique, t. 29, n° 11, novembre-décembre 1968, pp. 973-984

/3/ M. J. BERNSTEIN and F. HAI
Evidence for non-thermonuclear neutron production in a plasma Focus discharge
Physics Letters 31 A, 1970, p. 317

/4/ M.J. BERNSTEIN and G. G. COMISAR
Neutron energy and flux distributions from a cross-field acceleration model of Plasma Focus and Z-pinch discharges
Physics of Fluids, 15, 4, 1972, p. 700

/5/ A. BERNARD, A. COUDEVILLE, J. P. GARCONNET, P. GENTA, A. JOLAS, Y. LANDURE, J. de MASCUREAU, C. NAZET, R. VEZIN
In Plasma Physics and controlled nuclear Fusion Research (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1975), vol. III, p.83

/6/ A. BERNARD, A. COUDEVILLE, A. JOLAS, J. LAUNSPACH, J. de MASCUREAU
Detailled experimental study in various phases of the plasma Focus and evidence for non-thermal processes
Physics of Fluids, vol., 18, 1975 p. 180

/7/ G. LEHNER et F. POHL
Diagnostics de plasma utilisant les neutrons de la réaction D-D
Zeitschift für Physik, 207, 1967,p. 83

/8/ N. BOURBAKI
Intégration
Hermann

/9/ A. MESSIAH
Mécanique quantique, tome 1, appendice A9, p. 399,
Dunod 1954

/10/ P. GENTA, F. MILLET, R. VEZIN
Spectres neutroniques Focus
IIe partie : calcul à partir des spectres expérimentaux d'une fonction de distribution des deutérons accélérés
note C.E.A. n° 1803 du 28 mars 1975

/11/ J. L. DELCROIX
Physique des Plasmas, tome I, Dunod 1963

/12/ P. GENTA, F. MILLET, R. VEZIN
Calcul des spectres neutroniques dus aux réactions nucléaires dans les plasmas de deutérium, type Focus. - I. Présentation générale et analyse mathématique.
Note C.E.A. n° 1711 du 27 février 1974

/13/ R.B. THEUS, W.I. Mc GARRY and L.A. BEACH
Angular distribution and cross-section ratios for the reactions ^{2}H (d, n) ^{3}He and ^{2}H (d, p) ^{3}H below 500 keV.
Nuclear Physics, 80, 1966, p. 273

/14/ M. RIOU
Réactions nucléaires
Cours de Physique nucléaire, Orsay, 1967-1968

/15/ R.E. TEXTOR and V.V. VERBINSKI
OAK RIDGE NATIONAL LABORATORY
Report N.O. ORNL - 4160, 1968

Manuscrit reçu le 9 juin 1976

Vu et approuvé

ORSAY, le 13 mai 1976

Les Membres du Jury